Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Examen final, 16 janvier 2013

Exercice 1 :

1. Donner 3 matrices de $O(2) \setminus SO(2)$ (c'est à dire des matrices qui sont dans $O(2)$ mais pas dans $SO(2)$).
2. Montrer que si $P, Q \in O(3)$, alors $PQ \in O(3)$.

Exercice 2 :

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une équation cartésienne.
2. Est-ce que $v = (1, 1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$?
3. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|f(u) - v\|$ soit minimale, et déterminer ce u.
4. Donner la matrice (dans la base canonique) de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 :
Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xz + 4yz$$

1. Donner la matrice associée à q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathcal{B}$ une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$) qui soit aussi orthogonale pour q.
3. Existe-t-il $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $q(u) < 0$ et si oui donner un tel u.
4. Montrer que si $v \in \mathbb{R}^3$ et $\|v\| \leq 1$, alors $-1 \leq q(v) \leq 5$.

Exercice 4 :
Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto & \int_{-1}^{1} xP(x)Q(x)dx \end{array}$$

1. Montrer brièvement que f est une application bilinéaire symétrique.
2. Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer la signature de la forme quadratique q associée à f.