Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Correction de l'examen final, 16 janvier 2013

Exercice 1 :

1. On pouvait prendre par exemple $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
2. Par définition, $P \in O(3)$ si et seulement si ${}^tPP = I_3$ (idem pour Q et PQ). Ainsi, si $P, Q \in O(3)$, ${}^t(PQ)PQ =^t Q^tPPQ =^t QI_3Q =^t QQ = I_3$, donc $PQ \in O(3)$.

Exercice 2 :

1. $\mathrm{Im}(f)$ =Vect$((2,1,0),(1,0,2))$. Comme ces deux vecteurs sont libres, il s'agit d'un plan de $\mathbb{R}^3$. De plus, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$, et on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-4y-z=0\}$.
2. Comme $2-4-1 \neq 0$, $v \notin \mathrm{Im}(f)$.
3. D'après le cours, il existe un unique vecteur $w \in \mathrm{Im}(f)$ qui réalise le minimum pour $\|w-v\|$, et w est la projection orthogonale de v sur $\mathrm{Im}(f)$. Comme on connaît un vecteur orthogonal à $\mathrm{Im}(f)$, à savoir $(2,-4,-1)$, on sait que
$$v = w + (2,-4,-1)\frac{(v|(2,-4,-1))}{\|(2,-4,-1)\|^2} \text{ soit}$$
$$(1,1,1) = w + (2,-4,-1)\frac{-1}{7}$$
Ainsi $w = (1,1,1) + (\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}) = (\frac{9}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$.
Maintenant, comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur son image à savoir $\mathrm{Im}(f)$, on en déduit qu'il existe un unique $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(u) = w$, et que ce u est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^2$ à atteindre le minimum pour $\|f(u)-v\|$, et u est l'unique antécédent de w pour f. Si on pose $u = (u_1, u_2)$, cela nous donne $u_1(2,1,0) + u_2(1,0,2) = (\frac{9}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$ soit
$$\begin{array}{rrl} 2u_1 & +u_2 & = \frac{9}{7}\\ u_1 & & = \frac{3}{7}\\ & 2u_2 & = \frac{6}{7}\end{array}$$
et on vérifie que la seule solution de ce système est $u = (\frac{3}{7}, \frac{3}{7})$.
Au passage, $\|w-u\| = \|(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7})\| = \frac{\sqrt{21}}{7}$.
4. Si on note s cette symétrie, on sait que pour $p \in \mathbb{R}^3$, $s(p) = p - 2(2,-4,-1)\frac{(p|(2,-4,-1))}{\|(2,-4,-1)\|^2}$. En posant $p = (x,y,z)$, cela donne
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{(4,-8,-2)}{21}(2x-4y-z)\\ &= \frac{1}{21}((21x,21y,21z) + (-4,8,2)(2x-4y-z))\\ &= \frac{1}{21}((21x,21y,21z) + (-8x+16y+4z, 16x-32y-8z, 4x-8y-2z))\\ &= \frac{1}{21}(13x+16y+4z, 16x-11y-8z, 4x-8y+19z)\end{aligned}$$
La matrice de s est donc $\frac{1}{21}\begin{pmatrix}13 & 16 & 4\\ 16 & -11 & -8\\ 4 & -8 & 19\end{pmatrix}$.

Exercice 3 :

1. La matrice cherchée est $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
2. Comme la matrice M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, et on va chercher $P \in O(3)$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. Comme $P^{-1} = {}^tP$, la base associée à P conviendra alors. On a
$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 2 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 2 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = (3-X)((1-X)(2-X)-4) + 2(-(1-X)2)$
$= (3-X)(X^2-3X-2) + 4X - 4 = -X^3 + 6X^2 - 3X - 10.$
On constate que -1 est racine, et on en déduit que $\chi_M(X) = -(X+1)(X^2-7X+10)$.
Enfin après factorisation, on trouve que $X^2 - 7X + 10 = (X-2)(X-5)$, ainsi, $\chi_M(X) = -(X+1)(X-2)(X-5)$ et M a trois valeurs propres distinctes qui sont $-1, 2, 5$.
Après calcul, on trouve que les espaces propres associés sont
$E_{-1} = \text{Vect}(1,2,-2)$, $E_2 = \text{Vect}(-2,2,1)$, $E_5 = \text{Vect}(2,1,2)$.
Ce sont des vecteurs de norme 3, et on en déduit que $\mathcal{B} = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$ est une BON de vecteurs propres de M. Ainsi si P est la matrice associée à $\mathcal{B}$, i.e. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, alors ${}^tP = P^{-1}$ et donc $P^{-1}MP = {}^t PMP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, et donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormée qui est orthogonale pour q.
3. D'après ce qu'on a fait à la question précédente, on sait que $q((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})) = -1$, la réponse est donc oui, avec comme possibilité $u = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.
4. Soit x', y', z' les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\|v\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ car $\mathcal{B}$ est une BON. Par ailleurs, $q(v) = -x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2$ d'après la question 2). Ainsi si $\|v\| \leq 1$, $x'^2 + y'^2 + z'^2 \leq 1$ et
$$-1 \leq -(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leq q(v) = -x'^2 + 2y'^2 + 5y'^2 \leq 5(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leq 5$$

Exercice 4 :
Soit
$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \int_{-1}^{1} xP(x)Q(x)dx \end{array}$$

1. Par linéarité de l'integrale $f(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda f(P_1, Q) + f(P_2, Q)$ et de plus $f(P,Q) = f(Q,P)$.
2. On calcule les valeurs prises par f sur les éléments de cette base. On trouve :
$$\begin{array}{lll} f(1,1) & = \int_{-1}^{1} xdx & = 0 \\ f(1,X) & = \int_{-1}^{1} x^2dx & = \frac{2}{3} \\ f(1,X^2) & = \int_{-1}^{1} x^3dx & = 0 \\ f(X,X) & = \int_{-1}^{1} x^3dx & = 0 \\ f(X,X^2) & = \int_{-1}^{1} x^4dx & = \frac{2}{5} \\ f(X^2,X^2) & = \int_{-1}^{1} x^5dx & = 0 \end{array}$$
On en déduit que $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

3. En posant a, b, c les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, la forme quadratique s'écrit donc $q(a, b, c) = \frac{4}{3}ab + \frac{4}{5}bc$.
On peut calculer la signature de q sans faire trop de calculs. Tout d'abord, on remarque facilement que $\det(M) = 0$ (par exemple car la première et la troisième colonnes sont colinéaires). Par ailleurs les deux premières colonnes de M sont libres, ainsi rang(q) =rang$(M) = 2$. Ainsi la signature ne peut être que $(2, 0), (1, 1)$ ou $(0, 2)$. Cependant, en prenant $a, b, c > 0$, on voit que $q(a, b, c) > 0$, ainsi la signature $(0, 2)$ est impossible (car dans ce cas, q serait négative). De même, si on prend $a, c > 0$ et $b < 0$, alors $q(a, b, c) < 0$, ainsi la signature $(2, 0)$ est également impossible. C'est donc que la signature de q est $(1, 1)$.
On aurait aussi pu calculer la signature en mettant la forme q sous forme de carrées linéairement indépendants. Par exemple en posant $a' = a + b, b' = a - b$ et $c' = c$, on obtient que $q = \frac{1}{3}(a' + \frac{3}{5}c')^2 - \frac{1}{3}(b' + \frac{3}{5}c')^2$, ce qui nous redonne le même résultat.