Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Correction de l'interro n^o 3

Exercice 1 :

1. Par définition, $\det({}^tPP) = 1$ donc $\det({}^tP)\det(P) = \det(P)^2 = 1$, et donc $\det(P) = \pm 1$.
2. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, qui correspondent aux rotations d'angle 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.
3. Une solution est $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

1. On calcule d'abord le poynôme caractéristique de M,
$\chi_M = X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = (X-1)(X-2)(X-4)$.
Ainsi M admet 3 valeurs propres distinctes. Pour chaque valeur propre, on calcule un vecteur propre v_λ (en calculant $\ker(M - \lambda I)$). On trouve
$v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_4 = (1, -1, -2)$. Au passage, une fois qu'on connaît v_1 et v_2, on sait que $v_1 \wedge v_2$ sera vecteur propre pour 4. Cela nous fournit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, et il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs pour obtenir une base orthonormée. On pose donc
$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, et on obtient $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
2. On obtient $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
3. Au 1) on a trouvé $P \in O(3)$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Mais comme $P \in O(3)$, $P^{-1} ={}^t P$, et donc ${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Cela siginifie que dans la base $\mathcal{B}$ associée à P, la forme q s'écrit $q(x') = x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2$. Rappelons que par définition la base $\mathcal{B}$ est la base constituée des vecteurs colonnes de P. Concrètement, si on pose $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$, pour $x = x_1'f_1 + x_2'f_2 + x_3'f_3$, on a $q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2$. Ainsi la signature de q est $(3, 0)$ et q est définie positive.
4. On se place dans la base $\mathcal{B}$, et on utilise les coordonnées de cette base qu'on note x_i'. Si $x \in \mathcal{E}$, $q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2 = 1$. Par ailleurs,
$1 = q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2 \leq 4(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) = 4\|x\|^2$.
Attention, ici on utilise le fait que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée et donc que $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \|x\|^2$.
Ainsi, pour $x \in \mathcal{E}$, $\frac{1}{4} \leq \|x\|^2$, donc $\frac{1}{2} \leq \|x\|$, et donc $m \geq \frac{1}{2}$. Par ailleurs, on voit bien que ce minimum est atteint précisément sur les points de coordonées $(0, 0, \frac{1}{2})$ et $(0, 0, -\frac{1}{2})$ dans la base $\mathcal{B}$, ce qui correspond aux points $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}})$ et $(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}})$. De plus ce sont bien les seuls. En effet, si (x_1', x_2', x_3') sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$, qui atteint ce minimum, c'est à dire tel que $1 = q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2$ et $\|x\| = \frac{1}{2}$.
Alors soit $x_3' = \pm\frac{1}{2}$ et alors forcément, $x_1' = x_2' = 0$ car $q(x) = 1$. Et cela nous donne bien les deux points ci-dessus.
Soit $x_3' \neq \pm\frac{1}{2}$. Alors comme $1 = q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2$, on a forcément $|x_3'| < \frac{1}{2}$, et donc $x_1' \neq 0$ ou $x_2' \neq 0$. Dans un cas comme dans l'autre, on en déduit que
$1 = q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2 < 4(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) = 4\|x\|^2$,
et donc $\|x\| > \frac{1}{2}$, ce qui contredit le fait que $\|x\| = \frac{1}{2}$.

   Finalement, on a montré que le minimum est $m = \frac{1}{2}$ et qu'il est atteint uniquement aux deux points $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}})$ et $(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}})$.

Exercice 3 :

1. Après calcul, $\det(M) = -1$, donc M est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D disons, et on a donc $D = \ker(M - I) = \ker(\begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-9}{5} \end{pmatrix}) = \ker(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix})$. On trouve $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{3}x\}$.
2. On choisit un vecteur non-nul de $\mathcal{D}$, par exemple $u = (1, 2)$. On en déduit que $\frac{u}{\|u\|}$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{D}$. La projection sur $\mathcal{D}$ est ainsi donnée par

$$\begin{array}{llcl} p: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{u}{\sqrt{5}}.(\frac{u}{\sqrt{5}}|(x,y)) \end{array}$$

soit $p(x, y) = (\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5})$. Or si on note s la symétrie recherchée, on a $s = id_{\mathbb{R}^2} - 2p$, et il s'ensuit que $s(x, y) = (\frac{3x-4y}{5}, \frac{-4x-3y}{5})$ et la matrice de s est donc $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :
Soit $u = (1, -2, -2)$, $v = (-4, 5, 2)$ et et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déjà, on commence par remarquer que $\dim(F) = 2$, et la base en question doit donc contenir 2 éléments.
On commence par définir
$v' := v - \frac{u}{\|u\|}.\left(\frac{u}{\|u\|}|v\right) = (-4, 5, 2) - \frac{(1,-2,-2)}{3}.(\frac{-18}{3}) = (-4, 5, 2) + (2, -4, -4) = (-2, 1, -2)$.
Il ne reste plus qu'à normaliser, et on trouve qu'une base orthonormée de F est
$\{e_1, e_2\} = \{\frac{1}{3}(1, -2, -2), \frac{1}{3}(-2, 1, -2)\}$.
2. Le plus simple est de calculer $u \wedge v = (6, 6, -3)$. Ainsi, un vecteur normal à F est $(2, 2, -1)$, et une base orthonormée de $F^\perp$ est donc $\{\frac{1}{3}(2, 2, -1)\}$.
3. On peut calculer la projection avec deux méthodes.
La première consiste à dire que l'on dispose d'une BON de F à savoir $\{e_1, e_2\}$, donc la projection p_F sur F se calcule ainsi :
$p_F(x) = e_1(e_1|x) + e_2(e_2|x)$.
Ici, cela donne :
$p_F(1, 2, 1) = \frac{1}{9}(1, -2, -2)((1, -2, -2)|(1, 2, 1)) + \frac{1}{9}(-2, 1, -2)((-2, 1, -2)|(1, 2, 1)) = \frac{1}{9}(1, -2, -2)(-5) + \frac{1}{9}(-2, 1, -2)(-2) = \frac{1}{9}(-5, 10, 10)\frac{1}{9}(4, -2, 4) = \frac{1}{9}(-1, 8, 14)$.
L'autre méthode consiste à utiliser qu'on connaît une base orthonormée de $F^\perp$ à savoir $e_3 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$.
On en déduit que que la projection sur $F^\perp$ est donnée par $P_{F^\perp}(x) = e_3(e_3|x)$, et que donc $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$.
En particulier, $p_F(1, 2, 1) = (1, 2, 1) - \frac{1}{9}(2, 2, -1)((2, 2, -1)|(1, 2, 1)) = (1, 2, 1) - \frac{1}{9}(10, 10, -5) = \frac{1}{9}(-1, 8, 14)$.
4. On rappelle que la symétrie orthogonale par rapport à F a pour expression $s_F = p_F - p_{F^\perp}$.
Par ailleurs, $id_{\mathbb{R}^3} = p_F + p_{F^\perp}$, soit $p_F = id_{\mathbb{R}^3} - p_{F^\perp}$.
Il s'ensuit que $s_F = id_{\mathbb{R}^3} - 2p_{F^\perp}$.
Par ailleurs avec les notations ci-dessus, $p_{F^\perp}(x) = e_3(e_3|x)$, donc
$s_F(x) = x - 2e_3(e_3|x) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{2}{9}(2, 2, -1)(2x_1 + 2x_2 - x_3) = (x_1, x_2, x_3) + (-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9})(2x_1 + 2x_2 - x_3) = \frac{1}{9}(x_1 - 8x_2 + 4x_3, -8x_1 + x_2 + 4x_3, 4x_1 + 4x_2 + 7x_3)$.
La matrice de s_F est donc $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.