Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Interro n^o 3

Exercice 1 :

1. Montrer que si $P \in O(n)$, alors $\det(P) = \pm 1$.
2. Donner quatre matrices de $SO(2)$.
3. Compléter la matrice suivante P pour que $P \in SO(3)$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \cdot & \cdot \\ \frac{-1}{3} & \cdot & \cdot \\ \frac{2}{3} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :
Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $P \in O(3)$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
2. Soit q la forme quadratique associée à M. Donner l'expression de q.
3. Est-ce que q est définie positive ?
4. Soit $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) = 1\}$. On note $m = \inf_{x \in \mathcal{E}} \|x\|$. Montrer que $m \in \mathbb{R}$, et qu'il existe exactement deux points $p_1, p_2 \in \mathcal{E}$ tels que $\|p_1\| = \|p_2\| = m$.

Exercice 3 :

1. Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$. Montrer que $M \in O(2)$, puis donner les caractéristiques géométriques de M (i.e. si M est une rotation d'angle θ, déterminer θ, et si M est une symétrie, déterminer l'axe de cette symétrie).
2. Donner la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ qui représente (dans la base canonique) la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$.

Exercice 4 :
Soit $u = (1, -2, -2)$, $v = (-4, 5, 2)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Calculer la projection orthogonale de $(1, 2, 1)$ sur F.
4. Donner (dans la basse canonique de $\mathbb{R}^3$), la matrice de s_F, la symétrie orthogonale par rapport à F.