Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Interro n^o 1

Exercice 1 :
Calculer le déterminant de la matrice suivante.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

En déduire que M est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2 :
On considère le sous-ensemble de matrices réelles 2×2 suivant :

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de $\mathbf{F}$?

   On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel réel, et on définit une application $f : \mathbf{F} \to \mathbb{C}$ par

$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$$

2. Montrer que f est linéaire.
3. Montrer que f est bijective.
4. Montrer que pour toutes $M, N \in \mathbf{F}$, le produit MN est dans $\mathbf{F}$.
5. Montrer que $f(MN) = f(M)f(N)$ pour toutes $M, N \in \mathbf{F}$.

Exercice 3 :
Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_M(X)$.
2. Quelles sont les valeurs propres de M ? Donner des bases des sous-espaces propres associés.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Exercice 4 :
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$ et donner, en le justifiant, sa dimension.
2. Soit $e_1 = (1, 0, 0, -1)$, $e_2 = (0, 1, 0, -1)$, $e_3 = (0, 0, 1, -1)$ et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.
3. Soit

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & F & \to & F \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & (x + 3y + t, 3x - 2y, -2x + 2y + z, -y + z + t) \end{array}$$

   Montrer que φ est bien une application de F dans F, et qu'elle est linéaire. Puis calculer $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
4. Est-ce que φ est diagonalisable ? Si oui donner une base de vecteurs propres de φ.

Exercice 5 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. $\mathcal{C}_A = \{M \in M_3(\mathbb{C}) \mid MA = AM\}$

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$.
2. Soit λ une valeur propre de A, E_λ l'espace propre associé. Si $u \in E_\lambda$, montrer que $Mu \in E_\lambda$.
3. En déduire la dimension de $\mathcal{C}_A$.
   Attention, la dimension de $\mathcal{C}_A$ dépend de la dimension des espaces propres de A, et n'est pas la même pour toutes les matrices diagonalisables. Dans votre réponse il faut donc distinguer plusieurs cas.
4. Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, avec a, b, c trois nombres complexes distincts.
   Soit $\mathcal{C}_D = \{M \in M_3(\mathbb{C}) \mid MD = DM\}$. Donner une base de $\mathcal{C}_D$.