Corrigé du Contrôle 3, LM201

Exercice 1 :
Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de :

$$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x \sin(x))}$$

A l'ordre 3 en 0 on a :
$\mathrm{e}^x \sin(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})(x - \frac{x^3}{6}) + \circ(x^3) =$
$x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$
Comme cette expression tend vers 0 on peut réutiliser le DL de e^x en 0 :
$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x \sin(x))} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{(x+x^2+\frac{x^3}{3})^2}{2} + \frac{(x+x^2+\frac{x^3}{3})^3}{6} + \circ(x^3) =$
$1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) = 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} + \circ(x^3)$

Exercice 2 :
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

On a à integrer l'inverse d'un polynome du second degré. Il y a donc trois possibilités :

* le polynome a deux racines réelles distinctes a et b, auquel cas l'expression est (à une constante près) de la forme $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$, et on doit pouvoir décomposer cette fraction rationelle sous la forme $\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$ et on sait trouver une primitive maintenant.
* ou bien le polynome a une racine multiple, disons a, et donc à une constante près, l'expression qu'on cherche à integrer est de la forme $\frac{1}{(x-a)^2}$. Mais là on a une primitive pas dure à trouver : $-\frac{1}{x-a}$.
* dernier cas, le polynome n'a pas de racines réelles (i.e. a un discriminant < 0). Dans ce cas, à une constante multiplicative près, on a une expression de la forme $\frac{1}{x^2+cx+d} = \frac{1}{(x+\frac{c}{2})^2+d-\frac{c^2}{4}}$.
  Le terme $d - \frac{c^2}{4}$ est en fait $\frac{-\Delta}{4}$ donc est strictement positif.
  Puis on fait le changement de variable $u = x + \frac{c}{2}$, qui revient donc à $x = u - \frac{c}{2}$, donc donne $dx = du$, et on est ramené à integrer $\frac{1}{u^2+r}$ où $r = \frac{-\Delta}{4}$ est > 0. Là on fait tout pour se retrouver avec une expression de la forme $\frac{1}{1+w^2}$ dont on connait une primitive : Arctan. Or il suffit de

faire :
$\frac{1}{u^2+r} = \frac{1}{r}\frac{1}{\frac{u^2}{r}+1} = \frac{1}{r}\frac{1}{(\frac{u}{\sqrt{r}})^2+1}$.
Donc on fait le changement de variable $w = \frac{u}{\sqrt{r}}$ qui donne $du = \sqrt{r}dw$.

Dans le cas qui nous concerne, $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$ on est dans le troisième cas, i.e le polynome n'a pas de racines réelles, et on arrive à :
$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ d'où $I = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2+1}dx$.
On fait donc le changement de variables $x - 1 = u$, i.e $x = 1 + u$, qui donne $dx = du$ et comme dans l'integrale $I = \int_1^2 ...\ x$ variait entre 1 et 2, u (qui est égal à $x-1$) doit varier entre 0 et 1, d'où
$I = \int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = [\text{Arctan}]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.