Correction du controle n°1

1^er octobre 2009

1 Exercice 1

Il fallait faire un DL de $f(x) = \frac{1}{e^x+sin(x)}$ en 0 à l'ordre 3. On a : $\frac{1}{e^x+sin(x)} = \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)+x-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)} =$

$$\frac{1}{1+2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)} \tag{1}$$

On utilise maintenant le DL de $\frac{1}{1+u}$ en 0 qui est :

$$\frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3\ldots+(-1)^n u^n+\circ(u^n) \tag{2}$$

qui nous donne à l'ordre 3 :

$$f(x) = 1-(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))+(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^2-(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^3+\circ[(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^3] \tag{3}$$

Pour faire ça, j'ai juste remplacé u dans (2) par l'expression $2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)$ qu'on voyait apparaitre dans (1).

On doit ensuite développer (3). Pour bien comprendre ce qu'on doit faire, je détaille ce qu'il se passe pour le deuxième terme :

$$(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^2 = 4x^2+\frac{x^4}{4}+(\circ(x^3))^2+2x^3+4x.\circ(x^3)+x^2.\circ(x^3)$$

Poure faire ça j'ai utilisé la formule qui ne devrait pas trop vous étonner : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. Ensuite il faut se convaincre que

1. $\frac{x^4}{4} = \circ(x^3)$
2. $(\circ(x^3))^2 = \circ(x^3)$
3. $4x.\circ(x^3) = \circ(x^3)$
4. $x^2.\circ(x^3) = \circ(x^3)$
5. enfin que $\circ(x^3)+\circ(x^3)+\circ(x^3)+\circ(x^3) = \circ(x^3)$.

Finalement cela nous donne :

$$(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^2 = 4x^2+2x^3+\circ(x^3)$$

Avec la même méthode on obtient :
$(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^3 = 8x^3+\circ(x^3)$ et $\circ[(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^3] = \circ(x^3)$. Si on voulait être très rigoureux, pour la première égalité, il faudrait développer le cube avec la formule $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+\ldots$. Mais il faut absolument que vous soyez convaincu qu'une fois qu'on aura développé $(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))^3$, on aura le terme $(2x)^3$, et tous les autres seront des $\circ(x^3)$. La formule (3) devient donc :

$$f(x) = 1-(2x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3))+(4x^2+2x^3+\circ(x^3))-(8x^3+\circ(x^3))+\circ(x^3)$$

Qui donne après simplification :

$$1-2x+\frac{7}{2}x^2-6x^3+\circ(x^3)$$

2 Exercice 2

$$\begin{aligned} cos^3(x).sin(x) &= (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3.(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}) \\ &= (\frac{e^{3ix}+3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8}).(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}) \end{aligned} \tag{4}$$

On a intensivement utilisé le fait que $(e^z)^n = e^{nz}$ (qu'on a le droit de faire quand n est un réel positif), donc par exemple $(e^{ix})^3 = e^{3ix}$. Enfin on développe (4) en faisant les simplifications du genre $e^{2ix}.e^{-ix} = e^{ix}$ on obtient :

$$\begin{aligned} &(\frac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}}{8}).(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}) \\ &= \frac{1}{8}.\frac{e^{i4x}+3e^{i2x}+3+e^{-i2x}-e^{i2x}-3-3e^{-i2x}-e^{-i4x}}{2i} \\ &= \frac{1}{8}.(\frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2i}+2\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}) \\ &= \frac{1}{8}.(sin(4x)+2sin(2x)) = \frac{sin(4x)}{8}+\frac{sin(2x)}{4} \end{aligned}$$