Correction de l'examen

11 janvier 2010

Exercice 1

On commence par linéariser $(cos(x))^4$. Pour cela on passe en écriture complexe :

$$(\cos(x))^4 = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4 = \frac{(e^{ix})^4+4(e^{ix})^3e^{-ix}+6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2+4e^{ix}(e^{-ix})^3+(e^{-ix})^4}{2^4}$$

$$= \frac{e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}}{16}$$

$$= \frac{3}{8}+\frac{1}{8}\frac{(e^{i4x}+e^{-i4x})+4(e^{i2x}+e^{-i2x})}{2}$$

$$= \frac{3}{8}+\frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\text{Ainsi } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx = \frac{3\pi}{16}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}dx$$

$$= \frac{3\pi}{16}+[\frac{\sin(4x)}{32}+\frac{\sin(2x)}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

Exercice 2

Il faut tout d'abord trouver une racine du dénominateur. On remarque que -1 en est une. On en déduit alors la factorisation : $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$. La décomposition en élément simple sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationelle $\frac{X^2+3X}{(X+1)(X^2+1)}$ sera de la forme $\frac{a}{X+1}+\frac{bX+c}{X^2+1}$, car le degré du numérateur est strictement plus petit que celui du dénominateur (dans le cas contraire il y aurait eu un polynome en plus qu'on aurait pu obtenir en faisant le quotient du numérateur par le

dénominateur).
Pour identifier le coefficient a , on multiplie des deux côtés par $(X+1)$ et on évalue en -1. Cela donne $a = \frac{-2}{2} = -1$.
Cela nous donne donc $\frac{X^2+3X}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{-1}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+1}$. On passe le terme $\frac{-1}{X+1}$ à gauche, ce qui donne

$$\frac{X^2+3X+X^2+1}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{2X^2+3X+1}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{bX+c}{X^2+1} \tag{1}$$

A ce stade on peut utiliser plusieurs méthodes

- évaluer en $x=0$ qui nous donne $\frac{1}{1} = \frac{c}{1}$, i.e. $c=1$. Et pour trouver b on peut évlauer en $x=1$ qui donne $\frac{6}{4} = \frac{b+1}{2}$ soit $b=2$.
- on peut aussi remarquer que l'égalité des deux fractions rationnelles dans (1) implique que le numérateur de gauche est forcément divisible par $X+1$ et on a $2X^2+3X+1 = (X+1)(2X+1)$ et donc $\frac{2X^2+3X+1}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{(X+1)(2X+1)}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{2X+1}{X^2+1}$. Donc en identifiant $b=2$ et $c=1$.
- ou encore on multiplie par $X+1$ des deux côtés ce qui donne $2X^2+3X+1 = (X+1)(bX+c) = bX^2+(b+c)X+c$ donc encore par identification $b=2$ et $c=1$.

Finalement $\frac{X^2+3X}{X^3+X^2+X+1} = \frac{-1}{X+1} + \frac{2X+1}{X^2+1}$ et donc
$I = \int_0^1 \frac{x^2+3x}{x^3+x^2+x+1}dx = -\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}dx$ Or une primitive de $\frac{2x}{x^2+1}$ est $\ln(x^2+1)$ et on en déduit
$I = [-\ln(x+1) + \ln(x^2+1) + \arctan(x)]_0^1 = -\ln(2) + \ln(2) + \arctan(1) - \arctan(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

a) Non c'est faux et c'est une énorme faute que de le croire. Par exemple la suite $u_n = n + (-1)^n$ tend vers + l'infini. Mais elle n'est croissante à partir d'aucun rang. En effet pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $u_{2n} = 2n+1 > 2n = u_{2n+1}$.

b) Non plus. Par exemple on peut prendre la fontion $f(x) = \cos(2\pi x)$. On vérifie que pour tout x réel $f(x+1) = f(x)$ car cos est 2π-périodique. Donc $f(x+1) - f(x) = 0$ pour tout x donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x))$ existe et vaut 0. Mais f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 4

a) On résout d'abord le polynome associé à l'équation homogène : $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui done $r=1$ ou $r=2$. Ainsi les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\lambda e^x + \mu e^{2x}$ avec λ et μ deux réels. Ici, vu la forme du second membre, on va pouvoir trouver une solution particulière de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$.
Ce qui donne :
$-a\cos(x) - b\sin(x) + 3a\sin(x) - 3b\cos(x) + 2a\cos(x) + 2b\sin(x) = 10\cos(x)$.
Soit
$(a-3b)\cos(x) + (b+3a)\sin(x) = 10\cos(x)$ soit $b = -3a$ et en remplaçant,

$a + 9a = 10a = 10$ donc $a = 1$ et $b = -3$.
Ainsi on a trouvé une solution particulière $y_0(x) = \cos(x) - 3\sin(x)$. On sait donc que toutes les solutions de (E) sont de la forme y_0 plus une solution de l'équation homogène, à savoir de la forme $y(x) = \cos(x) - 3\sin(x) + \lambda e^x + \mu e^{2x}$. Pour trouver λ et μ on utilise les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -3$ ce qui en fait donne $\lambda = \mu = 0$ donc $f(x) = \cos(x) - 3\sin(x)$.

b) Si g est une solution de (E) différente de f , d'après le a) elle est de la forme $\cos(x) - 3\sin(x) + \lambda e^x + \mu e^{2x}$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ Dans ce cas , si $\mu \neq 0$ on a $g(x) \sim_{+\infty} \mu e^{2x}$ donc $|g(x)| \sim |\mu| e^{2x}$ donc tend vers + l'infini. Si $\mu = 0$ mais $\lambda \neq 0$ on a $|g(x)| \sim |\lambda| e^x$ qui tend aussi vers plus l'infini.

Exercice 5

On résout l'équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0 = (r - 2)(r - 3)$. Donc $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. Puis $u_0 = \lambda + \mu = 1 = 2\lambda + 3\mu$. D'où $u_1 - 2u_0 = 1 - 2 = -1 = \mu$. Et $\lambda = 2$. Donc $u_n = 2.2^n - 3^n$.
Alors si on avait $u_n = 0$ pour un $n \in \mathbb{N}$ on aurait $2.2^n = 3^n$ ce qui est impossible car 2 et 3 sont premiers entre eux. On peut donc considérer la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. De plus $u_n = 2.2^n - 3^n \sim_{+\infty} -3^n$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{-3^{n+1}}{-3^n} = 3$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$.

Exercice 6

Tout simplement pour $h \neq 0$, $\frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = \frac{h.f(h) - 0}{h} = f(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(0)$ car f est continue (donc en particulier en 0). Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = f(0)$.

Exercice 7

Le DL en 0 de $\sqrt{1 + u}$ est $1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16}$. On btient donc :

$$\sqrt{1 - \sin(x)} = \sqrt{1 - x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)}$$

$$= 1 + \frac{-x + \frac{x^3}{6}}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \circ(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + \circ(x^3)$$