Théorème 0.1. *Soit a et b $\in \mathbb{R}$, et f une fonction $\mathcal{C}^0$ sur un intervalle I, et $\phi : [a,b] \to I$ une fonction $\mathcal{C}^1$, alors*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

Démonstration. On considère F une primitive de f. Alors le membre de gauche est

$$[f]_{\phi(a)}^{\phi(b)} = [F \circ \phi]_a^b$$

. Et comme $F \circ \phi' = \phi'.f \circ \phi$ le membre de gauche est aussi $[F \circ \phi]_a^b$. □

En pratique on écrira :
on fait le changement de variable $x = \phi(t)$ qui donne $dx = \phi'(t)dt$.

L'idée est donc juste d'utiliser la formule de dérivation pour la composée. Voici des exemples :

0.1

dans les exemples qui suivent, on va partir d'une integrale de la forme $\int \phi' f(\phi)$ et passer à l'integrale $\int f$. Qui correspond au passge de la droite vers la gauche dans le théorème

1. $$\int_a^b 2tsin(t^2)dt = \int_{a^2}^{b^2} sin(x)dx$$
   On a fait $x = t^2$ qui a donné $dx = 2tdt$.

2. $$\int_a^b t^3 ln(1+t^4)dt = \frac{1}{4}\int_a^b 4t^3 ln(1+t^4)dt = \frac{1}{4}\int_{a^4}^{b^4} ln(1+x)dx$$
   On a fait $x = t^4$ qui donne $dx = 4t^3 dt$.

3. pour $X > 0$ on a
   $\int_1^X \frac{ln(t)}{t} dt = \int_0^{ln(X)} xdx$
   Là on a fait $x = ln(t)$ qui donne $dx = \frac{1}{t}dt$.

0.2

Et maintenant des exemples où on part d'une integrale $\int f(x)$, et qu'on transforme en la forme $\int \phi'(x).f(\phi(x))$ qu'on saura calculer (c'est le cas le plus utilisé).

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)cos(t)dt$
   Et celle là on sait la cacluler. Là on a fait le changement de variable $x = sin(t)$ qui a donné $dx = cos(t)dt$.

2. Dorénavant, au lieu d'écrir $\int_a^b$ j'écrirai uniquement $\int^X$, qui me donnera donc une fonction de X, qui sera justement la primitive que l'on cherche.

   On veut calculer $I = \int^X \sqrt{e^x - 1}dx$.
   On fait $x = ln(t)$ soit $t = e^x$, qui donne $dx = \frac{1}{t}dt$ d'où $\int^{e^X} \frac{\sqrt{t-1}}{t}dt$
   là on fait le changement de variable $u = t - 1$ qui donne $du = dt$ d'où $I = \int^{e^X-1} \frac{\sqrt{u}}{u+1}$.
   Puis on fait $u = w^2$ qui donne $du = 2wdw$ d'où

   $$I = \int^{\sqrt{e^X-1}} \frac{2w^2}{w^2+1} = \int^{\sqrt{e^X-1}} 1 - \frac{1}{w^2+1}dw = 2\sqrt{e^X-1} - 2Arctan(\sqrt{e^X-1})$$

   Pour ceux qui seraient dubitatifs, dérivez, et vous verrez que c'est bien une primitive de $\sqrt{e^X - 1}$.

0.3 Des exemples, avec indication

1. $$\int_0^X \frac{x^2 lnx}{x^3+1)^2}dx$$

   ind : en remarquant que $ln(x) = \frac{1}{3}ln(x^3)$ faire le changement de variable $u = x^3$, puis ensuite une integration par parties.

2. $$\int^X sin(ln(x))dx$$

   ind : faire $x = e^u$.

3. $$\int^X \frac{\sqrt{t+2}}{t+1}dt$$

   ind : faire $t + 2 = u$, puis $u = v^2$.

4. $$\int^X cos^4(x)sin^5(x)dx$$

   Faire $u = cos(x)$