Correction du devoir maison

2 décembre 2009

Exercice 1

Au voisinage de 0 on a :

$$\frac{\cos(x)}{1+x+x^2} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)}{1+x+x^2}$$

$= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\ )(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+\circ(x^4)\ )$
$= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{24})(1-x-x^2+x^2+2x^3+x^4-x^3-3x^4+x^4+\circ(x^4)\ )$
$= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})(1-x+x^3-x^4+\circ(x^4)\ )$
$= 1-x+x^3-x^4-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)$
$= 1-x-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^3}{2}-\frac{23x^4}{24}+\circ(x^4)$

Exercice 2

On fait un DL de f pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}$$

$$= \frac{x}{x(1+\frac{x}{2}+\circ(x)\ )} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\circ(x)} = 1-\frac{x}{2}+\circ(x)$$

Comme par ailleurs l'énoncé donne $f(0)=1$ le DL est valable au voisinage de 0. Comme c'est un DL à l'ordre 1, on en déduit que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

Exercice 3

On fait le changement de variable $u = \sqrt(x)$, soit $x = u^2$ qui donne $dx = 2u.du$:

$$I = \int_5^6 \frac{x\sqrt{x}+1}{x+1}dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{u^3+1}{u+1}2udu = 2\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{u^4+u}{u^2+1}du$$

Puis on fait la division euclidienne de $X^4 + X$ par $X^2 + 1$ qui donne $X^4 + X = (X^2 + 1)(X^2 - 1) + X + 1$.
D'où $\frac{X^4+X}{X^2+1} = X^2 - 1 + \frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{X^2+1}$. Donc

$$I = 2\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} u^2 - 1 + \frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\ du$$

En utilisant le fait qu'une primitive de $\frac{2u}{u^2+1}$ est $\ln(u^2 + 1)$ on a :

$$I = [\frac{2u^3}{3} - 2u + \ln(u^2 + 1) + 2\arctan(u)]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}}$$

$$= 2\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{5}}{3} + \ln(\frac{7}{6}) + 2\arctan(\sqrt{6}) - 2\arctan(\sqrt{5})$$

Exercice 4

Une racine évidente de X^3-2X^2+X-2 est 2 , qui permet de factoriser :$X^3-2X^2 + X - 2 = (X - 2)(X^2 + 1)$. On a donc

$$\frac{X+2}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = \frac{aX + b}{X^2 + 1} + \frac{c}{X - 2}$$

En multipliant par $(X-2)$ et en évaluant en 2 on obtient $c = \frac{4}{5}$. En faisant tendre X vers ∞ on trouve un équivalent $\frac{1}{X^2}$ à gauche, et à droite on a deux termes "dominants" :$\frac{a}{X} + \frac{c}{X}$. Ce dernier terme doit donc être nul, soit $a = -c = \frac{-4}{5}$. Pour finir on évalue en 0, qui donne $\frac{2}{-2} = -1 = b - \frac{c}{2}$, i.e. $b = \frac{-3}{5}$. Finalement

$$\frac{X+2}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = \frac{-4X - 3}{5(X^2 + 1)} + \frac{4}{5(X - 2)}$$

Exercice 5

On distingue deux cas :

- Si $\forall x \in \mathbb{R}_+$ on a $f(x) \leq 0$, alors 0 est le maximum, et est atteint en 0 (car $f(0) = 0$ par hypothèse).
- Sinon, il existe un $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) > 0$. Alors par définition de la limite, on sait qu'il existe un $A \geq 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) < f(x_0)$ (on a pris $\epsilon = f(x_0) > 0$). Alors sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, la fonction f étant continue y atteint ses bornes (théorème de Heine, ou Weierstrass). Donc il existe $x_1 \in [0, A]$ tel que pour tout $x \in [0, A]$ $f(x) \leq f(x_1)$. De plus on a que $x_0 \in [0, A]$, car sinon on aurait $x_0 \geq A$ donc $f(x_0) < f(x_0)$ qui est impossible. Et donc $f(x_0) \leq f(x_1)$. Ainsi pour $x \in [0, A]$ on a $f(x) \leq f(x_1)$ et de même pour $x \geq A$ on a $f(x) \leq f(x_0) \leq f(x_1)$. Donc la fonction f a bien un maximum, atteint en x_1.

Exercice 6

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^x, et on a que si on trouve une solution particulière y_1 de $y' - y = e^x$, et une solution y_2 de $y' - y = e^{2x}$, alors le caractère linéaire de l'équation fait que $y_1 + y_2$ est solution de $y' - y = e^x + e^{2x}$.
Pour trouver y_1 sous la forme $\lambda(x)e^x$, la variation de la constante nous donne $\lambda'(x) = 1$ donc par exemple $\lambda(x) = x$ soit $y_1(x) = xe^x$. Pour y_2 on peut appliquer la variation de la constante, ou trouver directement "à l'oeil" $y_2(x) = e^{2x}$. Donc $xe^x + e^{2x}$ est une solution de notre équation de départ.
Finalement les solutions sont de la forme $xe^x + e^{2x} + Ke^x$ avec $K \in \mathbb{R}$, et la condition $y(0) = 2$ nous donne $1 + K = 2$ donc $K = 1$.