Correction DM 1 121

1. u, v et w sont libres si et seulement si leur déterminant est non nul. Or $\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ (en développant par rapport à la première colonne)
$= -5 - x(-1-3x) + 1 - 2x = 3x^2 - x - 4$. Le discrimant de ce polynôme est $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-4) = 49 = 7^2$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1 \pm 7}{6} = \frac{4}{3}$ ou -1. Les vecteurs sont donc libres pour $x \neq \frac{4}{3}, -1$.

2. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. $\mathcal{P}$ a donc une équation de la forme $4x + y + 5z = d$ pour un $d \in \mathbb{R}$. On le détermine en remplaçant dans cette équation (x, y, z) par les coordonnées de A, ce qui donne : $4 + 2 - 5 = d = 1$. $\mathcal{P}$ a donc pour équation $4x + y + 5z = 1$.
$\mathcal{D}$ admet la parametrisation suivante : $\begin{cases} x &= & 1+t \\ y &= & 1+2t \\ z &= & 1+t \end{cases}$
Un point de $\mathcal{D}$ correspondant au paramètre t sera dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $4x+y+5z = 1 = 4(1+t)+(1+2t)+5(1+t) = 10+11t$ ce qui équivaut à $11t = -9$ soit $t = \frac{-9}{11}$. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{-7}{11} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix} \}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 3 & 0 \\ v & -1 & -1 \\ w & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-v+w & 5 & 3 \\ 2u+v+3w & 8 & 5 \\ u-v+2w & 6 & 5 \end{pmatrix}$. De sorte qu'on se ramène à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} u & -v & +w & = & -3 \\ 2u & +v & +3w & = & -2 \\ u & -v & +2w & = & -5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} u & -v & +w & = & -3 \\ & 3v & +w & = & 4 \\ & & w & = & -2 \end{cases}$$
On peut alors résoudre un tel système triangulaire :

$w = -2$. D'où en remplaçant w par sa valeur dans L_2 : $3v + (-2) = 4$ donc $v = 2$, puis en remplaçant v et w par leurs valeurs dans L_1 : $u - 2 + (-2) = -3$ donc $u = 1$. Donc il y a une unique solution qui est $(u, v, w) = (1, 2, -2)$.

4. $$\begin{cases} x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 4 \\ 3x & +y & +2z & = 4 \\ 5x & & +3z & = 8 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \ , \ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}$$

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 0 \\ & -5y & -z & = 4 \\ & -5y & -z & = 4 \\ & -10y & -2z & = 8 \end{cases}$$

On supprime L_3 qui est équivalent à L_2 , de même que $L_4 = 2L_2$. Le système équivaut donc à :

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 0 \\ & -5y & -z & = 4 \end{cases}$$

On reconnaît une droite paramétrisée par $t = y$:
$z = -4 - 5t$ et donc $x = -z - 2y = -(-4 - 5t) - 2t = 4 + 3t$. Les solutions sont donc une droite parmaétrisée ainsi :
$$\begin{cases} x & = & 4 + 3t \\ y & = & t & \qquad t \in \mathbb{R} \\ z & = & -4 - 5t \end{cases}$$

5. (a) On se convainc, en calculant M^2, M^3, $M^4 \ldots$, que M^n est de la forme $\begin{pmatrix} 3^n & u_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. On aurait alors $M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 3^n & u_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & -30.3^n + 2u_n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$ d'où la relation : $u_{n+1} = 2u_n - 30.3^n \ \forall n \geq 0$, et $u_1 = -30$. Donc également $u_n = 2u_{n-1} - 30.3^{n-1}$, qui donne $u_{n+1} = -30(3^n + 2.3^{n-1}) + 2^2 u_{n-1}$. En continuant encore une étape, on obtient $u_{n+1} = -30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2}) + 2^3 u_{n-2}$. On peut alors avoir l'intuition que $u_{n+1} = -30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3) + 2^n u_1 = -30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3) - 30.2^n = 30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3 + 2^n) = -30(\sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} 2^k) = -30.3^n(\sum_{k=0}^{n} (\frac{2}{3})^k) = -30.3^n \left(\frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = -30.\frac{3^{n+1}}{3} \left(\frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = -30 \left(\frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3 - 2} \right) = -30(3^{n+1} - 2^{n+1}) = u_{n+1}$. De sorte qu'on aurait $u_n = -30(3^n - 2^n)$ et donc

$$M^n = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Maintenant que l'on pense avoir trouvé la bonne formule, essayons de montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

*Initialisation : pour $n = 1$ le résultat est vrai , en partie car pour $n = 1$, $-30(3^n - 2^n) = -30$.

*Hérédité : soit $n \geq 1$ et supposons que $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Alors $M^{n+1} = M^n.M = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & -30.3^n - 2.30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Le coefficient en haut à droite vaut $-30(3^n + 2.3^n - 2.2^n) = -30(3^{n+1} - 2^{n+1})$. Ce qui achève la récurrence. On a donc prouvé que pour tout $n \geq 1$ $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

(b) $M \begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p_n - 30r_n \\ 2r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix}$ Un récurrence facile montrerait alors que pour tout $n \geq 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.3^n - 2.30(3^n - 2^n) \\ 2^n \end{pmatrix}$.
Ainsi $p_n = 59.3^n - 60.3^n + 60.2^n = 60.2^n - 3^n$. On sait alors que $60.2^n - 3^n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$, car *le* 3^n *va l'emporter devant le* 2^n. On peut essayer plusieurs valeurs et se rendre compte par exemple que $p_{15} = -12382827$, donc la réponse est oui , à partir d'un moment, les renards auront mangé toutes les poules. Précisément, on peut se rendre compte que c'est au temps $n = 11$ que cela arrive, au sens où $p_{10} = 2391$ (il y a à ce moment là $r_{10} = 1024$ renards) et il faudrait que $3p_{10} > 30r_{10}$ pour que les poules survivent ce qui n'est pas le cas, et $p_{11} = -54267$.