# DM LM 121

*Encadrez bien vos résultats.*
A rendre le 8 Novembre.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$ , $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils libres ?

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A = (1, 2, -1)$ et engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $B = (1, 1, 1)$ et de vecteur directeur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$.

3. Trouver $u, v$ et $w$ tels que $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 3 & 0 \\ v & -1 & -1 \\ w & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ -2 & 8 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

4. Résoudre le système
$$\begin{array}{llll} x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 4 \\ 3x & +y & +2z & = 4 \\ 5x & & +3z & = 8 \end{array}$$

5. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ , on note $M^n = M.M \ldots M$ (n fois).
   Trouver une formule simple pour $M^n$.
   (indication : $3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3 + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 3^{n-i}2^i = 3^n(\sum_{i=0}^{n} (\frac{2}{3})^i)$ et reconnaître alors une série géométrique).

   (b) On considère une population de poules et de renards. Au temps $n \in \mathbb{N}$ on a $p_n$ poules et $r_n$ renards. Leur population évolue ainsi :
   (1) Au temps $n + 1$ on a trois fois plus de poules qu'au temps $n$ ,

mais entre temps chaque renard a mangé 30 poules.
(2) Au temps $n+1$ on a deux fois plus de renards qu'au temps $n$.
Cela se traduit par les relations :
(1) $p_{n+1} = 3p_n - 30r_n$
(2) $r_{n+1} = 2r_n$
Initialement il y a 59 poules et 2 renards ($p_0 = 59$ et $r_0 = 2$).
Question : existe-t-il un moment où les renards auront mangé toutes les poules ? (dit autrement, existe-t-il un $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n \leq 0$ ).
indication : considérer la multiplication matricielle $M.\begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix}$ et la question précédente.
Pour info :

| n= | $p_n$ | $r_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 59 | 2 |
| 1 | 117 | 4 |
| 2 | 231 | 8 |
| 3 | 453 | 16 |
| 4 | 879 | 32 |