Université Pierre et Marie Curie - LM121 - Année 2012-2013

Correction Interro n^o 3

Exercice 1 :
On trouve $\det(A) = 6 \neq 0$ donc A est inversible. On calcule son inverse avec la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 2 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 2 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 2 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :
On vérifie que les points ne sont pas alignés. (ABC) est donc le plan passant par A et dirigé par les vecteurs libres $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Leur produit vectoriel est
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1. \end{pmatrix}$ qui est donc un vecteur normal à (ABC). Le plan a donc une équation de la forme $x - 2y + z = d$. Pour trouver d on remplace cette équation avec les coordonnées de A :
$1 - 2 + 1 = d = 0$
Donc $x - 2y + z = 0$ est une équation de (ABC).

Exercice 3 :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \ddots & & & \iddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \iddots & & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{ccc} C_1 & \leftarrow & C_1 + C_{2n} \\ C_2 & \leftarrow & C_2 + C_{2n-1} \\ & \vdots & \\ C_n & \leftarrow & C_n + C_{n+1} \end{array}} \begin{vmatrix} a+b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a+b & \ddots & & & \iddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a+b & \iddots & & & \ddots & a & 0 \\ a+b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\vdots \\ L_{2n} \leftarrow L_{2n}-L_1}]{\substack{L_{n+1} \leftarrow L_{n+1}-L_n \\ L_{n+2} \leftarrow L_{n+2}-L_{n-1}}} \begin{vmatrix} a+b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a+b & \ddots & & & \iddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a-b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & \ddots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^n(a-b)^n$$

Exercice 4 :

1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. En faisant quelques essais, on a le sentiment que la formule doit être $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
   Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
   Pour $n = 1$ le résultat est vrai.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Alors $T^{n+1} = T^nT = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n & 2^n + 2n2^{n-1} \\ 0 & 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui achève notre récurrence.

3. On montre par récurrence que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P^{-1}MP)^n = P^{-1}M^nP$.
   Pour $n = 1$ c'est vrai.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $(P^{-1}MP)^n = P^{-1}M^nP$. Alors $(P^{-1}MP)^{n+1} = (P^{-1}MP)^n(P^{-1}MP) = P^{-1}M^nPP^{-1}MP = P^{-1}M^nMP = P^{-1}M^{n+1}P$, ce qui achève notre récurrence.
   De plus $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = T$.
   Ainsi, $P^{-1}M^nP = T^n$. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on en déduit que $M^n = PT^nP^{-1}$.
   En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que
   $M^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 2^n & n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)2^n & -n2^{n+1} \\ n2^{n-1} & -(n-1)2^n \end{pmatrix}$.

4. (a) On trouve $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+1} - 4u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, donc $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M$ marche (et c'est en fait la seule matrice qui marche).
   On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_2$, et $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Si le résultat est vrai pour n, d'après ce qu'on a montré au début de la question, $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A \cdot A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ce qui achève notre récurrence.

   (b) D'après la question précédente $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. On utilise maintenant le résultat de la question (3) pour en déduire que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)2^n & -n2^{n+1} \\ n2^{n-1} & -(n-1)2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(n+1)2^n - 3n2^{n+1} \\ 4n2^{n-1} - 3(n-1)2^n \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $u_n = 4n2^{n-1} - 3(n-1)2^n = 2n2^n - 3n2^n + 3 \cdot 2^n = 2^n(3-n)$. En particulier, $u_n \neq 0$ quand $n \neq 3$, on en déduit que si $n \geq 4$, $u_n \neq 0$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} \neq 0$, et

$$\frac{u_{n+5}}{u_{n+4}} = \frac{2^{n+5}(3-(n+5))}{2^{n+4}(3-(n+4))} = \frac{2(-n-2)}{-n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2.$$