Université Pierre et Marie Curie - LM121 - Année 2012-2013

Correction Interro n^o 3

Exercice 1 :

1. $\det(A) = -9$.
2. On en déduit que A est inversible. On calcule son inverse, ici avec la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 3 & -6\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 0 & 1\\ 7 & 1 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{9}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 0 & 1\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

   On vérifie qu'on a bien en effet $A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ en vérifiant que $A.\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = I_3$.

3. Ce système s'écrit sous la forme $A \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 6\\ 6\end{pmatrix}$. Ainsi en multipliant des deux cotés par A^{-1} on en déduit que si $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ est solution, alors

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

   Réciproquement, $\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ est bien une solution, ce qu'on peut voir sans calcul : $A\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = A \cdot A^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 6\\ 6\end{pmatrix}$.

Exercice 2 :
Comme $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, on trouve $r_1(z) = iz+2$ et $r_2(z) = iz-4i+2$. Ainsi $(r_2 \circ r_1)(z) = r_2(iz+2) = i(iz+2)-4i+2 = -z-2i+2$. Pour répondre à la question, on calcule $(r_2 \circ r_1)(2-i) = -i$. Ainsi l'image de $(2,-1)$ par $r_2 \circ r_1$ est $(0,-1)$.

Exercice 3 :

$$D = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2\\ \vdots\\ C_1 \leftarrow C_1 - C_n}} \begin{vmatrix}2-n & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & & 0 & 1\end{vmatrix} = 2-n$$

Ainsi $D = 2 - n$.

Exercice 4 :

1.
$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$C^3 = C \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 12 \\ -8 & 1 & -12 \\ 8 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$
Donc $C^3 - 4C^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 12 \\ -8 & 1 & -12 \\ 8 & 0 & 13 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -12 \\ 4 & -7 & 0 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.
2. On cherche donc à résoudre
$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & -12 \\ 4 & -7 & 0 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \mu I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -12 \\ 4 & -7 & 0 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda+\mu & 2\lambda & 3\lambda \\ -\lambda & 2\lambda+\mu & 0 \\ \lambda & -\lambda & \lambda+\mu \end{pmatrix} = 0$$
Soit $\begin{pmatrix} -3+\lambda+\mu & -8+2\lambda & 3\lambda-12 \\ 4-\lambda & -7+2\lambda+\mu & 0 \\ -4+\lambda & 4-\lambda & -3+\lambda+\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On identifie les coefficients. Le coefficient dans la colonne 1 et ligne 2 nous donne $4 - \lambda = 0$ soit $\lambda = 4$. Le coefficient dans la colonne et ligne 1 donne $-3+\lambda+\mu = 0$ soit $\mu = -1$. On vérifie que cette solution, $(\lambda, \mu) = (4, -1)$ marche pour les autres coefficients. Au passage, c'est l'unique solution, qui nous donne donc $C^3 - 4C^2 + 4C - I_3 = 0$.
3. On en déduit l'égalité $C^3 - 4C^2 + 4C = I_3 = C \cdot (C^2 - 4C + 4I_3) = (C^2 - 4C + 4I_3) \cdot C$. On en déduit que C est inversible, d'inverse $C^{-1} = C^2 - 4C + 4I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.