Université Pierre et Marie Curie - LM121 - Année 2012-2013

Interro n^o 3

Question de cours : *donner la définition d'une base de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer son déterminant, et si c'est possible calculer A^{-1}.

Exercice 2 :
Soit $A = (1,1,1), B = (1,2,3), C = (0,1,2)$. Ces points sont-ils alignés ? Si non, donner une équation du plan (ABC).

Exercice 3 :
On considère le déterminant suivant de taille $2n$:

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \ddots & & & \iddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \iddots & & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Calculer D.

Exercice 4 :
Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1}.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ trouver[1] une formule simple pour T^n. Justifier soigneusement votre résultat.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(P^{-1}MP)^n = P^{-1}M^nP$. Calculer $P^{-1}MP$ et en déduire une formule pour M^n.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 4$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

   (a) Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) En utilisant la question précédente, et la formule obtenue pour M^n à la question (3), en déduire une formule pour u_n.
   Puis montrer que $u_n \neq 0$ pour $n \geq 4$.
   Finalement justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+5}}{u_{n+4}}$ existe et la calculer.

1. Si vous bloquez, commencez par calculer T^2, T^3, T^4, T^5.