Université Pierre et Marie Curie - LM 121 - 2012/2013

Correction Contrôle continu n 2 MIME 11.4

Exercice 1 :

1. $\det(u, v, w) = 0$ donc les vecteurs ne sont pas libres. Pour trouver une combinaison linéaire nulle : $au + bv + cv = 0$ avec a, b, c non tous nuls, on résoud le système

$$\begin{array}{llll} 3a & -2b & +5c & = 0 \\ -2a & +b & -4c & = 0 \\ 4a & -b & +10c & = 0 \end{array}$$

On trouve par exemple une solution $(a, b, c) = (3, 2, -1)$ qui correspond au fait que $3u + 2v - w = 0$.

2. On cherche donc a, b, c tels que $au + bv + cv = z$. Cela amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{array}{llll} 3a & -2b & +5c & = 1 \\ -2a & +b & -4c & = 1 \\ 4a & -b & +10c & = 1 \end{array} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{llll} a & -b & +c & = 2 \\ -2a & +b & -4c & = 1 \\ 4a & -b & +10c & = 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \begin{array}{llll} a & -b & +c & = 2 \\ & -b & -2c & = 5 \\ & 3b & +6c & = -7 \end{array}$$

Mais la ligne 2 indique que $b + 2c = \frac{-5}{2}$ alors que la ligne 3 indique que $b + 2c = \frac{-7}{2}$, ce qui est impossible, donc z n'est pas combinaison linéaire de u, v et w.

Exercice 2 :

Pour trouver l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ comme $t = x - 2$ les égalités correspondant à y et z donnent ce système d'équations pour $\mathcal{D}$

$$2x - y - 1 = 0$$
$$x + z - 3 = 0$$

Ainsi un point de $\mathcal{D}'$ étant de la forme $(2t, 1-t, 2+2t)$ s'il appartenait aussi à $\mathcal{D}$ devrait aussi vérifier son équation cartésienne, à savoir :

$$\begin{cases} 2(2t)-(1-t)-1 & = 0 \\ 2t+2+2t-3 & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5t-2 & = 0 \\ 4t-1 & = 0 \end{cases}$$

Ce qui aboutit à $t = \frac{2}{5}$ et $t = \frac{1}{4}$, ce qui est impossible, donc les deux droites n'ont pas de point commun.

Exercice 3 :

On pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1. L'équation est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ -x_1-x_3 \\ -x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui équivaut au système

$$\begin{array}{rrrl} & x_2 & +x_3 & = 1 \\ -x_1 & & -x_3 & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & & = 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$L_2 \leftarrow -L_2 \quad \begin{array}{rrrl} & x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & & +x_3 & = -2 \\ -x_1 & +x_2 & & = 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \\ -x_1 & +x_2 & & = 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad \begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \end{array}$$

On reconnaît l'équation d'une droite, en prenant comme paramètre $t = x_3$ par exemple, on obtient
$$\begin{cases} x_1 & = & -2-t \\ x_2 & = & 1-t \\ x_3 & = & t \end{cases}$$

2. L'équation est $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2+x_3\\-x_1-x_3\\x_2-x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ qui nous amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{array}{rrrl} & x_2 & +x_3 & =3 \\ -x_1 & & -x_3 & =2 \\ -x_1 & +x_2 & & =1 \end{array} \qquad \Leftrightarrow$$

$$L_2 \leftarrow -L_2 \quad \begin{array}{rrrl} & x_2 & +x_3 & =3 \\ x_1 & & +x_3 & =-2 \\ -x_1 & +x_2 & & =1 \end{array} \qquad \Leftrightarrow$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & =-2 \\ & x_2 & +x_3 & =3 \\ -x_1 & +x_2 & & =1 \end{array} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lrrrl} & x_1 & & +x_3 & =-2 \\ & & x_2 & +x_3 & =3 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 & & x_2 & +x_3 & =-1 \end{array} \qquad \Leftrightarrow$$

Les lignes 2 et 3 sont incompatibles, donc il n'y a pas de solution.

Exercice 4 :

$M = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Comme on voit que ces deux vecteurs sont libres, cela équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés, ce qui équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. On calcule ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5x-5y-5z+15$$

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc

$$x+y+z=3.$$