Université Pierre et Marie Curie - LM 121 - 2012/2013

Correction du Contrôle continu n 2 MMIME 11.3

Exercice 1 :

1. On sait qu'ils sont liés si et seulement si $\det(u,v,w)=0$. Or $\det(u,v,w)=0$ donc ils sont liés. On cherche alors a résoudre le système donné par $au+bv+cw=0$. On trouve par exemple la solution suivante :
   $-2u+v+w=0$.
2. Dire que z est combinaison linéaire de u,v et w équivaut à dire qu'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $au+bv+cw=z$. Cela nous donne le système suivant :

$$\begin{array}{cccc} a & -b & +3c & =1 \\ 2a & +b & +3c & =1 \\ 3a & +2b & +4c & =1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} a & -b & +3c & =1 \\ & 3b & -3c & =-1 \\ & 5b & -5c & =-2 \end{array}$$

   Mais la deuxième ligne donne $b-c=\frac{-1}{3}$ et la troisième $b-c=\frac{-2}{5}$, donc le système n'a pas de solutions, donc z n'est pas combinaison linéaire de u,v,w.

Exercice 2 :

1. On peut par exemple paramétrer D_1 par y, et D_2 par z et on en déduit les équations paramétriques suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x & =2+t \\ y & =t \\ z & =11+2t \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x & =\lambda-1 \\ y & =2\lambda+2 \\ z & =\lambda \end{cases}$$

   Dire qu'un point M de l'espace est à la fois dans D_1 et D_2, équivaut à dire qu'il existe un paramètre t tel que $M=(2+t,t,11+2t)$ (i.e. $M\in D_1$), et qu'il existe un parametre λ tel que $M=(\lambda-1,2\lambda+2,\lambda)$. Cela amène à résoudre les solutions en λ et t du système

$$\begin{array}{ccccc} 2 & +t & = & \lambda-1 \\ & t & = & 2\lambda+2 \\ 11 & +2t & = & \lambda \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc} t & -\lambda & = & -3 \\ t & -2\lambda & = & 2 \\ 2t & -\lambda & = & -11 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} t & -\lambda & = & -3 \\ & -\lambda & = & 5 \\ & \lambda & = & -5 \end{array}$$

Les deux dernières équations étant les mêmes, le sytème équivaut au suivant :

$$\begin{cases} t - \lambda & = -3 \\ -\lambda & = 5 \end{cases}$$

qui admet une unique solution $\lambda = -5$ et $t = -8$. En remplaçant cette valeur de λ (resp. t) dans la paramétrisation de D_1 (resp. D_2), on obtient le même point, et on en déduit que $D_1 \cap D_2$ est réduit à un point qui est $A = (-6, -8, -5)$. (En particulier, les droites sont concourantes).

2. D'après la question précédente, D_1 passe par A et a pour vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même D_2 passe par A et a pour vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, comme ces deux droites sont concourantes, et non confondues (car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires) il existe bien un unique plan qui les contient, $\mathcal{P}$, qui est le plan passant par A de vecteurs directeurs u, v.

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$-3x + y + z = a$$

pour une certaine constante a. En utilisant le fait que A est dans $\mathcal{P}$, on trouve $a = 5$ soit l'équation

$$\mathcal{P} \; : \; -3x + y + z = 5$$

Exercice 3 :

Il faut juste calculer correctement les deux membres de l'égalité.

Exercice 4 :

En complexe, on obtient $f(z) = iz$ et $g(z) = 3 + i + iz$. Et finalement $g \circ f(z) = 3 + i - z$. Le point fixe z_0 de $g \circ f$ doit être la solution de l'équation $g \circ f(z_0) = z_0$. Et après un calcul on trouve $z_0 = \frac{3+i}{2}$. Ainsi, $g \circ f$ est une rotation de centre $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, et d'angle $-\pi$ (c'est en fait une symétrie centrale).