Université Pierre et Marie Curie - LM 121 - 2012/2013

Correction du Contrôle continu n° 1

Exercice 1 :
$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}) &= e^{i\frac{\pi}{12}} \\
&= e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(\frac{1-i}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{12}) &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\
\sin(\frac{\pi}{12}) &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

On aurait bien sûr pu directement utiliser les formules pour $\cos(a-b)$ *et* $\sin(a-b)$.

Exercice 2 :

1. On cherche w sous la forme $w = x + iy$. Si $w^2 = -7 - 24i$ on obtient les trois égalités :

   $$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -7 \\ 2xy &= -24 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{cases}$$

   La troisième ligne provient du fait que

   $$x^2 + y^2 = |w|^2 = |w^2| = |-7-24i| = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

   L'addition de la première et de la troisième lignes donne $2x^2 = 18$ soit $x = \pm 3$. Si $x = 3$, alors la deuxième ligne nous donne $y = \frac{-24}{6} = -4$. Ainsi $w = 3 - 4i$ est solution. L'autre solution est $-w = -3 + 4i$.

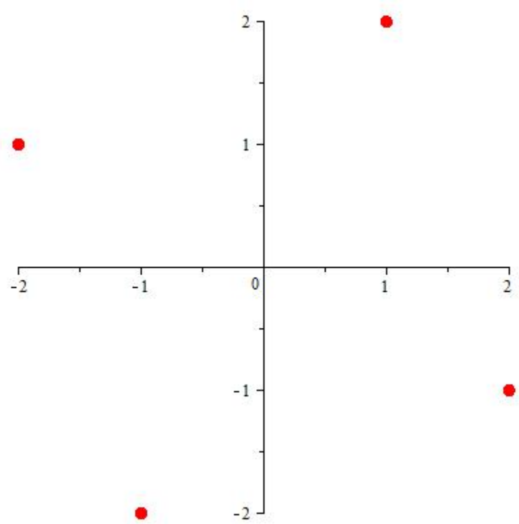
2. Posons donc $w = 3 - 4i$. Comme $w^2 = -7 - 24i$, si u est une racine carrée de w, i.e. si $u^2 = w$, on aura $u^4 = (u^2)^2 = w^2 = -7 - 24i$, de sorte que u sera une racine quatrième de $-7 - 24i$.

On cherche ainsi $u = x + iy$, qui soit une racine carrée de $w = 3 - 4i$. Comme $|w| = \sqrt{9 + 16} = 25$, cela nous donne trois égalités :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 3 \\ 2xy & = -4 \\ x^2 + y^2 & = 5 \end{cases}$$

L'addition de la première et de la troisième lignes nous donne $2x^2 = 8$ soit $x = \pm 2$. Si $x = 2$, on trouve $y = -1$, ce qui nous donne $u = 2 - i$, qui est donc **une** racine quatrième de $-7 - 24i$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \{(2-i)e^{\frac{ik\pi}{2}}, k = 0 \dots 3\} \\ &= \{(2-i), i(2-i), -(2-i), -i(2-i)\} \\ &= \{2-i, 1+2i, -2+i, -1-2i\} \end{aligned}$$



Exercice 3 :
On linéarise l'expression à intégrer :

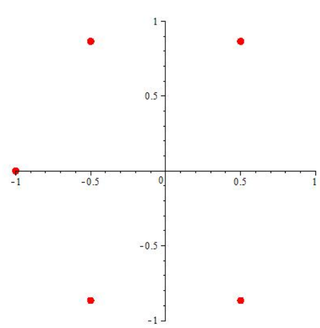
$$\begin{aligned} \sin^5(\theta) &= (\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i})^5 \\ &= \frac{e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}}{32i} \\ &= \frac{\sin(5\theta)}{16} - \frac{5\sin(3\theta)}{16} + \frac{10\sin(\theta)}{16} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(\theta)d\theta &= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(5\theta) - 5\sin(3\theta) + 10\sin(\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{16}\left[-\frac{\cos(5\theta)}{5} + \frac{5\cos(3\theta)}{3} - 10\cos(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{3-25}{15} + 10\right) \\
&= \frac{1}{16}\frac{-22+150}{15} \\
&= \frac{128}{16\times 15} \\
&= \frac{64}{8\times 15} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. Pour $z \neq 1$,
$$P(z) = \frac{z^6 - 1}{z - 1}$$
Comme par ailleurs $P(1) = 6 \neq 0$, 1 n'est pas racine de P, on en déduit que les racines de P sont la racines sixièmes de l'unité, auxquelles on enlève 1, i.e.
$$\begin{aligned}
\mathscr{S} &= \{e^{\frac{2ik\pi}{6}}, k = 1\dots 5\} \\
&= \{e^{\frac{ik\pi}{3}}, k = 1\dots 5\} \\
&= \{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}
\end{aligned}$$
Dans le plan ces points sont représentés ainsi :



2. Comme P est de degré 5, et qu'il a cinq racines distinctes, elles sont toutes de multiplicité 1, et

$$P(z) = (z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(z+1)(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

   Dit de manière plus concise :

$$P(z) = \prod_{k=1}^{5}(z - e^{\frac{ik\pi}{3}})$$

3. Ainsi si on évalue P en 2 on trouve que

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{5}(2 - e^{\frac{ik\pi}{3}}) &= P(2) \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \\ &= 63\end{aligned}$$