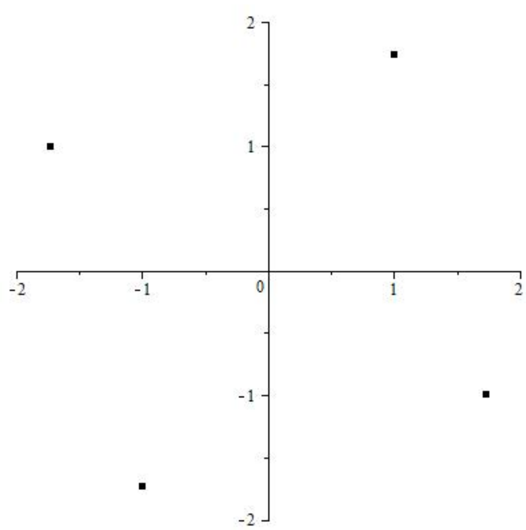
Université Pierre et Marie Curie - LM 121 - 2012/2013

Correction du Contrôle continu n° 1

Exercice 1 :
$|u+v|^2+|u-v|^2 = (u+v)\overline{(u+v)}+(u-v)\overline{(u-v)} = (u+v)(\overline{u}+\overline{v})+(u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = u\overline{u}+u\overline{v}+v\overline{u}+v\overline{v}+u\overline{u}-u\overline{v}-v\overline{u}+v\overline{v} = 2(u\overline{u}+v\overline{v}) = 2(|u|^2+|v|^2)$.

Exercice 2 :
Si on pose $a = -8-8\sqrt{3}i$, la question revient à trouver les quatre racines quatrièmes de a. On cherche donc à mettre a sous forme polaire, i.e. écrire $a = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$r = |a| = 16$, donc $e^{i\theta} = \frac{a}{16} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Comme $\sqrt[4]{16} = 2$,

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \{2e^{\frac{i\pi}{3}}e^{\frac{ik\pi}{2}}, k = 0\dots 3\}\\ &= \{2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2ie^{\frac{i\pi}{3}}, -2e^{\frac{i\pi}{3}}, -2ie^{\frac{i\pi}{3}}\}\\ &= \{1+i\sqrt{3}, -\sqrt{3}+i, -1-i\sqrt{3}, \sqrt{3}-i\}\end{aligned}$$



Exercice 3 :
On linéarise l'expression à intégrer :

$$\begin{aligned}\cos^5(\theta) &= (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^5\\ &= \frac{e^{5i\theta}+5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}+10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}}{32}\\ &= \frac{\cos(5\theta)}{16}+\frac{5\cos(3\theta)}{16}+\frac{5\cos(\theta)}{8}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(\theta)d\theta &= \left[\frac{\sin(5\theta)}{16\times 5} + \frac{5\sin(3\theta)}{16\times 3} + \frac{5\sin(\theta)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{3-25}{15} + 10\right) \\
&= \frac{1}{16}\frac{-22+150}{15} \\
&= \frac{128}{16\times 15} \\
&= \frac{64}{8\times 15} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. (a) On vérifie bien que $P(2) = 0$.

   (b) On cherche Q tel que $(z-2)Q(z) = z^3 - iz^2 - 4z + 4i$. Pour retrouver le terme en z^3 de $P(z)$, le terme dominant de $Q(z)$ doit être z^2.
   On cherche alors à déterminer le coefficient qui vient juste après z^2, i.e. on cherche Q sous la forme $Q(z) = z^2 + az + \ldots$
   Cela nous donnerait $(z-2)Q(z) = (z-2)(z^2 + az + \ldots) = z^3 + z^2(-2+a) + \ldots$.
   Si on veut que cela vaille $P(z)$, il faut que $-2+a = -i$, i.e. $a = 2-i$.
   On cherche donc maintenant $Q(z)$ sous la forme $Q(z) = z^2+(2-i)z+b$ tel que

   $$(z-2)(z^2 + (2-i)z + b) = z^3 - iz^2 - 4z + 4i$$

   En regardant le dernier terme du membre de droite, on voit qu'on doit avoir l'égalité : $-2b = 4i$, soit $b = -2i$. Finalement cela nous donne la forme suivante pour Q :

   $$Q(z) = z^2 + (2-i)z - 2i$$

   On peut vérifier que cela marche effectivement.

   (c) Ainsi $P(z) = (z-2)(z^2 + (2-i)z - 2i)$. On cherche alors à factoriser $z^2 + (2-i)z - 2i$.
   C'est un polynôme de degré 2, son discriminant est $\Delta = (2-i)^2 - 4(-2i) = 3 + 4i$. On cherche alors les racine carrées de Δ sous la forme $w = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
   En écrivant que $w^2 = \Delta = 3+4i$, on obtient les 3 relations suivantes :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 &=& 3 \\ 2xy &=& 4 \\ x^2 + y^2 &=& 5 \end{array}\right.$$

On rappelle que la troisième égalité provient du fait que $x^2 + y^2 = |w|^2 = |3+4i| = \sqrt{25} = 5$.
En additionnant la première et la troisième égalité, on obtient $2x^2 = 8$. Une solution est donc $x = 2$, et en utilisant la deuxième égalité, $y = 1$.
$w = 2+i$ est donc une racine carrée de Δ, l'autre étant $-w = -2-i$.
Les racines de $z^2 + (2-i)z - 2i$ sont donc

$$\frac{-2+i \pm (2+i)}{2}$$

ce qui donne deux solutions $z_1 = i$ et $z_2 = -2$.
Finalement, P se factorise ainsi :

$$P(z) = (z-2)(z-i)(z+2)$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur n que si P est un polynôme qui s'écrit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, et si α est racine de P, alors il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.

   Commençons par faire l'initialisation de notre récurrence.
   Si $n = 1$, cela veut dire que P s'écrit $P(z) = az + b$. On peut alors dire que $P(z) = a(z-\alpha) + b - a\alpha$. Par ailleurs, $P(\alpha) = 0$ par hypothèse, donc $a(\alpha-\alpha)+b-a\alpha = 0$, soit $b-a\alpha = 0$. Ainsi $P(z) = a(z-\alpha)$. Donc en posant $Q(z) = a$ (qui est un polynôme constant), on a bien $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.

   Montrons maintenant que la propriété est héréditaire.
   Soit $n > 1$, et $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, un polynôme dont α est racine. On remarque que $(z-\alpha)(a_n z^{n-1}) = a_n z^n - \alpha a_n z^{n-1}$.
   On en déduit que

$$\begin{aligned} P(z) - (z-\alpha)(a_n z^{n-1}) &= P(z) - (a_n z^n - \alpha a_n z^{n-1}) \\ &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 - (a_n z^n - \alpha a_n z^{n-1}) \\ &= (a_{n-1} + \alpha a_n) z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0 \end{aligned}$$

   pour des nouveaux coefficients b_i. Ainsi, si on pose

$$R(z) = P(z) - (z-\alpha)(a_n z^{n-1})$$

   $R(z)$ est de la forme $R(z) = b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0$. Par ailleurs $R(\alpha) = P(\alpha) - (\alpha-\alpha) a_n \alpha^{n-1} = 0 - 0 = 0$. Donc α est racine de R. Ainsi par hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $Q(z)$ tel que $R(z) = (z-\alpha)Q(z)$.
   Cela nous donne : $P(z) - (z-\alpha) a_n z^{n-1} = (z-\alpha)Q(z)$ et finalement, $P(z) = (z-\alpha)(Q(z) + a_n z^{n-1})$, qui est une décomposition comme voulue, ce qui achève notre récurrence.