Université Pierre et Marie Curie - LM 121 - 2012/2013

Contrôle continu n° 1

Exercice 1 :
Soit $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Exercice 2 :
Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des nombres complexes z tels que $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$. En particulier, donner la forme cartésienne des éléments de $\mathscr{S}$, et les représenter dans le plan complexe.

Exercice 3 :
Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x) dx$$

Exercice 4 :

1. Considérons le polynôme à coefficients complexes suivant :
   $P(z) = z^3 - iz^2 - 4z + 4i$.
   (a) Montrer que 2 est une racine de P.
   (b) Trouver un polynôme à coefficients complexes $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-2)Q(z)$.
   (c) Factoriser P.
2. Plus généralement, soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes (i.e. $a_i \in \mathbb{C}$), et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Démontrer le résultat suivant (qui figure dans votre cours) : si α est une racine de P, alors il existe un polynôme à coefficients complexes $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.
   Indication : on pourra faire un récurrence sur n.