Correction contrôle continu 3 LM 121 pcme 14.2

1. En multipliant les deux matrices on tombe sur l'égalité
$\begin{pmatrix} a+2b & 3a-4b \\ -2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$
ce qui équivaut donc au système :
$$\begin{aligned} a+2b &= \ 11 \\ 3a-4b &= \ 3 \end{aligned}$$
On résout ce système et on trouve qu'il existe une unique solution : $a = 5$, $b = 3$.

2. On trouve $Det(A) = 6 \neq 0$ donc A est inversible. On calcule son inverse avec la méthode du pivot de Gauss :
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 2 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
On vérifie bien que $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 2 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 2 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

3. On vérifie que les points ne sont pas alignés. (ABC) est donc le plan passant par A et dirigé par les vecteurs libres $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Leur produit vectoriel est
$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1.\end{pmatrix}$ qui est donc un vecteur normal à (ABC). Le plan a donc une équation de la forme $x - 2y + z = d$. Pour trouver d on remplace cette équation avec les coordonnées de A :
$1 - 2 + 1 = d = 0$
Donc $x - 2y + z = 0$ est une équation de (ABC).

4. Il y a énormément de possiblités. Par exemple $B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ marche.