Correction contrôle continu 2 LM121 PCME 14.2

1. En coordonnées complexes on a (en utilisant le fait que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$) :

$$r_{A,\frac{\pi}{2}} = z \mapsto i(z-1-i)+1+i = iz+2$$
$$r_{B,\frac{\pi}{2}} = z \mapsto i(z-2+i)+2-i = iz-3i+1$$

   Ainsi $(r_{B,\frac{\pi}{2}} \circ r_{A,\frac{\pi}{2}})(z) = i(iz+2)-3i+1 = -z-i+1$ et donc $(r_{B,\frac{\pi}{2}} \circ r_{A,\frac{\pi}{2}})(z_C) = -(-1-i)-i+1 = 2$. Donc le point recherché a pour coordonnées $(2,0)$.

2. u, v et w sont libres si et seulement si leur déterminant est non nul. Or $\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ (en développant par rapport à la première colonne)
   $= -5 - x(-1-3x)+1-2x = 3x^2-x-4$. Le discrimant de ce polynôme est $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-4) = 49 = 7^2$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1\pm 7}{6} = \frac{4}{3}$ ou -1. Les vecteurs sont donc libres pour $x \neq \frac{4}{3}, -1$.

3. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. $\mathcal{P}$ a donc une équation de la forme $4x+y+5z = d$ pour un $d \in \mathbb{R}$. On le détermine en remplaçant dans cette équation (x,y,z) par les coordonnées de A, ce qui donne : $4+2-5 = d = 1$. $\mathcal{P}$ a donc pour équation $4x+y+5z=1$.
   $\mathcal{D}$ admet la parametrisation suivante : $\begin{cases} x & = & 1+t \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1+t \end{cases}$
   Un point de $\mathcal{D}$ correspondant au paramètre t sera dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $4x+y+5z = 1 = 4(1+t)+(1+2t)+5(1+t) = 10+11t$ ce qui équivaut à $11t = -9$ soit $t = \frac{-9}{11}$. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{-7}{11} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix} \}$

4. On pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) L'équation est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui équivaut au système

$$\begin{array}{cccc} & x_2 & +x_3 & = 1 \\ -x_1 & & -x_3 & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & & = 3 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lcccc} & & x_2 & +x_3 & = 1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 & x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & -x_1 & +x_2 & & = 3 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lcccc} L_1 \leftrightarrow L_2 & x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & & x_2 & +x_3 & = 1 \\ & -x_1 & +x_2 & & = 3 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lcccc} & x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & & x_2 & +x_3 & = 1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 & & x_2 & +x_3 & = 1 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \end{array}$$

On reconnaît l'équation d'une droite, en prenant comme paramètre $t = x_3$ par exemple, on obtient

$$\begin{cases} x_1 & = & -2 - t \\ x_2 & = & 1 - t \\ x_3 & = & t \end{cases}$$

(b) L'équation est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{cccc} & x_2 & +x_3 & = 3 \\ -x_1 & & -x_3 & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & & = 1 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lcccc} & & x_2 & +x_3 & = 3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 & x_1 & & +x_3 & = -2 \\ & -x_1 & +x_2 & & = 1 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{llllll}
L_1 \leftrightarrow L_2 & x_1 & & +x_3 & = -2 \\
& & x_2 & +x_3 & = 3 \\
& -x_1 & +x_2 & & = 1
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{lllll}
& x_1 & & +x_3 & = -2 \\
& & x_2 & +x_3 & = 3 \\
L_3 \leftarrow L_3 + L_1 & & x_2 & +x_3 & = -1
\end{array}
$$

Les lignes 2 et 3 sont incompatibles, donc il n'y a pas de solution.