# Correction contrôle 1 LM121

10 septembre 2012

1. $M_1$ est le point de coordonnées $(3,2)$.
   $M_2$ de coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . C'est le point du cercle unité qui fait un angle de $\frac{2\pi}{3}$ avec l'axe $(Ox)$.
   $$z_{M_3} = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-3+3i+i+1}{1+1} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$
   $M_3$ est donc le point de coordonnées $(-1,2)$.
   $z_{M_4} = 2e^{\frac{-4i\pi}{3}} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i\sqrt{3}$. $M_4$ a donc pour coordonnées $(-1, \sqrt{3})$.
2. On pose $z = re^{i\theta}$. L'égalité devient $z^4 = r^4e^{4i\theta} = -16 = 16e^{i\pi} = 2^4e^{i\pi}$. Une solution est donc $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$, qui nous donne la solution particulière :
   $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (= \sqrt{2} + i\sqrt{2})$.
   Ainsi $z^4 = -16 = z_1^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_1}\right)^4 = 1$
   $\Leftrightarrow \frac{z}{z_1} \in \{1, e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{\frac{3i\pi}{2}}\}$.
   Les solutions sont donc :
   $$z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{4}}, z_2 = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}, z_3 = 2e^{\frac{5i\pi}{4}}, z_4 = 2e^{\frac{7i\pi}{4}}$$
3. On pose $z = x + iy$. On a alors :
   $$\begin{aligned}\frac{2z+1}{z+i} &= \frac{2x+1+2iy}{x+i(y+1)} = \frac{(2x+1+2iy)(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))} \\ &= \frac{(2x+1)x+2y(y+1)+i(-(2x+1)(y+1)+2yx)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+x+2y^2+2y+i(-2xy-2x-y-1+2yx)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+x+2y^2+2y+i(-2x-y-1)}{x^2+(y+1)^2}\end{aligned}$$
   La partie imaginaire sera nulle si et seulement si $-2x - y - 1 = 0$ , ce qui correspond donc à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x - 1$, privée du point

$(0,-1)$ , qui correspond au nombre complexe d'affixe $-i$, qui n'est pas dans le domaine de définition de $z \mapsto \frac{z+1}{z+i}$.

4.
$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{-4}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) = \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-2e^{i\theta}+e^{-i\theta}-e^{i\theta}+2e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$
$$= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} - 3(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})\right)$$
$$= \frac{-1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)$$

5. On pose $Z = z^2$. L'égalité devient
$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 + Z^5 = 0$$
Si cette égalité a lieu, $Z \neq 1$ (sinon en remplaçant, on aurait $6 \times 1 = 0$ ). La formule d'une somme géométrique nous donne alors :
$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 + Z^5 = \frac{Z^6-1}{Z-1} = 0$$
donc $Z^6 - 1 = 0$, donc $z^{12} = Z^6 = 1$ , donc $z$ est une racine 12-ième de l'unité, donc $|z| = 1$.