Correction DM 2 LM 121 PCME 14.2

1. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & 3 & 0\\ v & -1 & -1\\ w & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u-v+w & 5 & 3\\ 2u+v+3w & 8 & 5\\ u-v+2w & 6 & 5\end{pmatrix}$. De sorte qu'on se ramène à résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rrrcr} u & -v & +w & = & -3\\ 2u & +v & +3w & = & -2\\ u & -v & +2w & = & -5\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{array} \left\{\begin{array}{rrrcr} u & -v & +w & = & -3\\ & 3v & +w & = & 4\\ & & w & = & -2\end{array}\right.$$
On peut alors résoudre un tel système triangulaire :
$w = -2$. D'où en remplaçant w par sa valeur dans L_2 : $3v + (-2) = 4$ donc $v = 2$, puis en remplaçant v et w par leurs valeurs dans L_1 : $u - 2 + (-2) = -3$ donc $u = 1$. Donc il y a une unique solution qui est $(u, v, w) = (1, 2, -2)$.

2. (a) $Det(A) = -9$.

   (b) On sait que A est inversible si et seulement si $Det(A) \neq 0$, ainsi A est inversible. On calcule A^{-1} par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right. \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\right. \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 3 & -6\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\right. \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_2]{L_1\leftarrow L_1+L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 0 & 1\\ 7 & 1 & -3\end{pmatrix}\right. \xrightarrow{L_3\leftarrow \frac{L_3}{9}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 0 & 1\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right. \xrightarrow[L_2\leftarrow L_2+5L_3]{L_1\leftarrow L_1+3L_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right.$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Pour être bien sûr, on vérifie que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3} \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) En écriture matricielle, ce système équivaut à : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$

En multipliant à gauche par A^{-1} on obtient :
$A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3} \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Il y a ainsi une unique solution $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

3.

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 4 \\ 3x & +y & +2z & = 4 \\ 5x & & +3z & = 8 \end{array} \right. \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \ , \ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +2y & +z & = 0 \\ & -5y & -z & = 4 \\ & -5y & -z & = 4 \\ & -10y & -2z & = 8 \end{array} \right.$$

On supprime L_3 qui est équivalent à L_2 , de même que $L_4 = 2L_2$. Le système équivaut donc à :

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +2y & +z & = 0 \\ & -5y & -z & = 4 \end{array} \right.$$

On reconnaît une droite paramétrisée par $t = y$:
$z = -4 - 5t$ et donc $x = -z - 2y = -(-4 - 5t) - 2t = 4 + 3t$. Les solutions sont donc une droite parmaétrisée ainsi :
$\left\{ \begin{array}{lll} x & = & 4 + 3t \\ y & = & t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z & = & -4 - 5t \end{array} \right.$

4. (a) On se convainc, en calculant M^2, M^3, M^4 ..., que M^n est de la forme $\begin{pmatrix} 3^n & u_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. On aurait alors $M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 3^n & u_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 3^{n+1} & -30.3^n + 2u_n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$ d'où la relation : $u_{n+1} = 2u_n - 30.3^n \ \forall n \geq 0$, et $u_1 = -30$. Donc également $u_n = 2u_{n-1} - 30.3^{n-1}$, qui donne $u_{n+1} = -30(3^n + 2.3^{n-1}) + 2^2 u_{n-1}$. En continuant encore une étape, on obtient $u_{n+1} = -30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2}) + 2^3 u_{n-2}$. On peut

alors avoir l'intuition que $u_{n+1} = -30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3) + 2^n u_1 = -30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3) - 30.2^n = 30(3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3 + 2^n) = -30(\sum_{k=0}^{n} 3^{n-k}2^k) = -30.3^n(\sum_{k=0}^{n}(\frac{2}{3})^k) = -30.3^n \left(\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) = -30.\frac{3^{n+1}}{3}\left(\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) = -30\left(\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3-2}\right) = -30(3^{n+1} - 2^{n+1}) = u_{n+1}$. De sorte qu'on aurait $u_n = -30(3^n - 2^n)$ et donc

$$M^n = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Maintenant que l'on pense avoir trouvé la bonne formule, essayons de montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$
*Initialisation : pour $n = 1$ le résultat est vrai , en partie car pour $n = 1$, $-30(3^n - 2^n) = -30$.
*Hérédité : soit $n \geq 1$ et supposons que $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
Alors $M^{n+1} = M^n.M = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & -30.3^n - 2.30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.
Le coefficient en haut à droite vaut $-30(3^n + 2.3^n - 2.2^n) = -30(3^{n+1} - 2^{n+1})$. Ce qui achève la récurrence. On a donc prouvé que pour tout $n \geq 1$ $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

(b) $M \begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p_n - 30r_n \\ 2r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix}$ Un récurrence facile montrerait alors que pour tout $n \geq 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & -30(3^n - 2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.3^n - 2.30(3^n - 2^n) \\ 2^n \end{pmatrix}$.
Ainsi $p_n = 59.3^n - 60.3^n + 60.2^n = 60.2^n - 3^n$. On sait alors que $60.2^n - 3^n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, car *le* 3^n *va l'emporter devant le* 2^n. On peut essayer plusieurs valeurs et se rendre compte par exemple que $p_{15} = -12382827$, donc la réponse est oui , à partir d'un moment, les renards auront mangé toutes les poules. Précisément, on peut se rendre compte que c'est au temps $n = 11$ que cela arrive, au sens où $p_{10} = 2391$ (il y a à ce moment là $r_{10} = 1024$ renards) et il faudrait que $3p_{10} > 30r_{10}$ pour que les poules survivent ce qui n'est pas le cas, et $p_{11} = -54267$.