Correction du DM 1

10 septembre 2012

(a)

$$\frac{4+i}{5i-3} = \frac{(4+i)(-3-5i)}{(5i-3)(-3-5i)} = \frac{-12-20i-3i+5}{25+9} = \frac{-7}{36} - i\frac{23}{36}$$

(b)

$$|z| = \sqrt{(\frac{\sqrt{10}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{10}}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$$

Dans l'écriture $z = re^{i\theta}$, on a $r = |z| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$. Ainsi

$$e^{i\theta} = \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{z}{r}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}(-\frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

On sait que $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond à $\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, c'est à dire que son argument est $\frac{\pi}{4}$. Pour trouver l'argument de $-(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -e^{i\frac{\pi}{4}}$ voici deux méthodes :

- Comme $u = -(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ est l'opposé de $v = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$, il correspond au symétrique par rapport à l'origine, ce qui correspond à faire un demi-tour, c'est à dire une rotation d'angle π.. Pour obtenir l'argument de u, il faut donc rajouter π à celui de v, qui lui vaut $\frac{\pi}{4}$. Donc l'argument de $-(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ est $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. Donc $-(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ (Si ce raisonnement ne vous paraît pas claire, essayer de faire un dessin dans le refaire en faisant un dessin dans le plan complexe).
- On peut aussi le voire en disant que $-1 = e^{i\pi}$ (si cette formule ne vous paraît pas claire, réfléchissez-y...) . D'où , $-(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Finalement $z = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

(c) On écrit z sous forme cartésienne : $z = x + iy$.

$$\frac{z+1}{2z-1} = \frac{x+1+iy}{2x-1+i2y} = \frac{(x+1+iy)(2x-1-i2y)}{(2x-1+i2y)(2x-1-i2y)}$$

$$= \frac{(x+1)(2x-1)+2y^2+i(y(2x-1)-2y(x+1))}{(2x-1)^2+4y^2}$$

Pour que ce nombre soit imaginaire pur, il faut que sa partie réelle soit nulle, c'est à dire que $(x+1)(2x-1)+2y^2=0$ ce qui équivaut à

$$2x^2+x+2y^2-1=0$$

Pour la deuxième condition,

$$\left|\frac{3z+i}{z-3}\right| = 3 \Leftrightarrow |3z+i|^2 = 3^2|z-3|^2 \Leftrightarrow |3x+i(3y+1)|^2 = 9|x-3+iy|^2 \Leftrightarrow 9x^2+(3y+1)^2 = 9(x-3)^2+9y^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+9y^2+6y+1 = 9x^2-54x+81+9y^2 \Leftrightarrow 6y+1 = -54x+81 \Leftrightarrow y = -9x+\frac{40}{3}$$

Si on met en commun les deux calculs qu'on vient de faire, $z = x+iy$ vérifie $\frac{z+1}{2z-1}$ est imaginaire pur et $\left|\frac{3z+1}{z-3}\right|$ si et seulement si z vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x^2+x-1+2y^2 \\ y = -9x+\frac{40}{3} \end{cases}$$

En *remplaçant la deuxième équation dans la première* on obtient l'équation

$$2x^2+x-1+2(-9x+\frac{40}{3})^2 = 0 = 2x^2+x-1+162x^2-480x+\frac{3200}{9} = 164x^2-479x+\frac{3191}{9}$$

Le discriminant de ce trinome est $\Delta = \frac{-28327}{9}$, le système n'a donc pas de solutions, et l'ensemble des z qui vérifient les conditions de l'énoncé est donc vide.

(d) On peut faire directement le calcul en posant $u = x+iy$ et $v = x'+iy'$. Une autre méthode (moins calculatoire est :

$$|u+v|^2+|u-v|^2 = (u+v)\overline{(u+v)}+(u-v)\overline{(u-v)} = (u+v)(\bar{u}+\bar{v})+(u-v)(\bar{u}-\bar{v})$$

$$= u\bar{u}+u\bar{v}+v\bar{u}+u\bar{u}+u\bar{u}-u\bar{v}-v\bar{u}+v\bar{v} = 2(|u|^2+|v|^2)$$

(e) On utilise la formule d'Euler :

$$\sin(\theta)\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4}\right)$$

$$= \frac{e^{3i\theta}+2e^{i\theta}+e^{-i\theta}-e^{i\theta}-2e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{8i} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}+\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) = \frac{1}{4}(\sin(3\theta)+\sin(\theta))$$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)d\theta\right)$. On se convainc qu'une primitive de $\sin(3\theta)$ est $-\frac{\cos(3\theta)}{3}$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(3\theta)}{3}-\cos(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(0+0-(\frac{-1}{3})-(-1)) = \frac{1}{4}\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

(f) Il est facile de voir que $z_0 = -\sqrt[3]{2}$ est une solution de l'équation. A partir de là ,

$$z^3 = -2 = z_0^3 \Leftrightarrow (\frac{z}{z_0})^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$$

Il y a donc trois solutions :

$$z = -\sqrt[3]{2}, \quad z = -\sqrt[3]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}} \ , \quad z = -\sqrt[3]{2}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$