DM 2 LM 121 PCME14.2

à rendre le lundi 28 Novembre.

1. Trouver u, v et w tels que $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 3 & 0 \\ v & -1 & -1 \\ w & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ -2 & 8 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $Det(A)$.

   (b) A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

   (c) Résoudre le système

$$\begin{array}{cccccc} x & -y & +2z & = & 3 \\ 2x & +y & -2z & = & 6 \\ 3x & -2y & +z & = & 6 \end{array}$$

3. Résoudre le système

$$\begin{array}{cccc} x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 4 \\ 3x & +y & +2z & = 4 \\ 5x & & +3z & = 8 \end{array}$$

4. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M^n = M.M \dots M$ (n fois).
   Trouver une formule simple pour M^n.
   (indication : $3^n + 2.3^{n-1} + 2^2.3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}.3 + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 3^{n-i} 2^i = 3^n (\sum_{i=0}^{n} (\frac{2}{3})^i)$ et reconnaître alors une série géométrique).

   (b) On considère une population de poules et de renards. Au temps $n \in \mathbb{N}$ on a p_n poules et r_n renards. Leur population évolue ainsi :
   (1) Au temps $n + 1$ on a trois fois plus de poules qu'au temps n , mais entre temps chaque renard a mangé 30 poules.
   (2) Au temps $n + 1$ on a deux fois plus de renards qu'au temps n.

Cela se traduit par les relations :
(1) $p_{n+1} = 3p_n - 30r_n$
(2) $r_{n+1} = 2r_n$
Initialement il y a 59 poules et 2 renards ($p_0 = 59$ et $r_0 = 2$).
Question : existe-t-il un moment où les renards auront mangé toutes les poules ? (dit autrement, existe-t-il un $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n \leq 0$).
indication : considérer la multiplication matricielle $M.\begin{pmatrix} p_n \\ r_n \end{pmatrix}$ et la question précédente.
Pour info :

n=	p_n	r_n
0	59	2
1	117	4
2	231	8
3	453	16
4	879	32