LM 121 2011/2012
PCME 14.2

Voici une précision sur l'organisation de l'année :
Vous aurez deux DM à rendre , et trois contrôles continus. A priori, les dates des contrôles continus devraient être à peu près (à chaque fois un vendredi) : 7 Octobre, 4 Novembre et 25 Novembre.

DM à rendre lundi 3 Octobre

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs.

(a) Mettre sous forme cartésienne $z = \frac{4+i}{5i-3}$

(b) trouver la forme polaire de $z = -\frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}$ (on rappelle qu'écrire un nombre complexe z sous forme polaire c'est l'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un de ses arguments. Profitons en pour rappeler que θ n'est pas unique, il est seuleument *unique modulo* 2π. Par exemple $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{5\pi}{3}}$, et donc $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{3}$ sont tous les deux des arguments de z. Les arguments de z sont dans cet exemple exactement les nombres de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.)

(c) Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient :
$\frac{z+1}{2z-1}$ est un imaginaire pur, et $\left|\frac{3z+i}{z-3}\right| = 3$.

(d) Soit u et $v \in \mathbb{C}$. Prouver que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

(e) Calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos^2(\theta)d\theta$$
(indication : une méthode pourrait consister à linéariser $\sin(\theta)\cos^2(\theta)$).

(f) Trouver les nombres complexes z tels que $z^3 = -2$