Cohomologie étale des ensembles semi-algébriques dans les espaces de Berkovich

Florent Martin
IMJ
4 Place de Jussieu, Paris, France
fmartin@math.jussieu.fr

Résumé - *Soit k un corps non-archimédien complet algébriquement clos, et $\mathcal{X}$ une variété algébrique sur k. Par analogie avec ce que l'on fait sur $\mathbb{C}$, on peut lui associer un espace k-analytique, $\mathcal{X}^{an}$ [Ber90]. Pour $\mathcal{X}$ = Spec(A) affine, un sous-ensemble S de $\mathcal{X}^{an}$ est semi-algébrique si c'est une combinaison booléenne finie d'ensembles définis par des inégalités $|f| \leq |g|$ où f et $g \in A$. Cette définition se globalise à $\mathcal{X}$ une variété algébrique. En suivant la théorie développée par Berkovich dans [Ber93], on définit des groupes de cohomologie étale à support compact $H^i_c(S, \mathbb{Q}_l)$, et pour $l \neq car(\tilde{k})$, et S localement-fermé, on montre qu'ils vérifient les propriétés attendues, en particulier, ce sont des espaces vectoriels de type fini.*

Mots clés - Espaces de Berkovich, Cohomologie étale, ensembles semi-algébriques

1 Introduction

Soit k un corps non-archimédien complet algébriquement clos, et $\mathcal{X}$ une variété algébrique sur k. Il est assez naturel de vouloir définir un objet géométrique, $\mathcal{X}^{an}$, qui serait la variété analytique sur k naturellement associée à $\mathcal{X}$. Les définitions naturelles qui viennent à l'esprit ne marchent pas, car k, muni de sa topologie naturelle est totalement discontinu. Dans les années 60, Tate a élaboré une théorie satisfaisante de la géometrie analytique sur k. Les espaces qu'il construit sont appelés espaces rigides, et sont construits en recollant des espaces affinoïdes, analogues non-archimédien des ouverts de $\mathbb{C}^n$. Cependant, une théorie cohomologique satisfaisante manquait, et quelques années plus tard, Berkovich, en s'inspirant des idées de Tate pour en proposer un nouveau point de vue, définissait une cohomologie étale des espaces k-analytiques vérifiant de nombreuses propriétés esperées : finitude dans des cas raisonnables, théorèmes de comparaison... Cette théorie a trouvé de nombreuses applications. En arithmétique d'abord en prenant $k = \mathbb{Q}_p$, mais en géométrie complexe également en utilisant $k = \mathbb{C}((X))$. Le présent travail répond par exemple à une question de François Loeser et a été utilisé dans un travail concernant l'étude des fibres de Milnor [HL11].

2 Ensembles semi-algébriques

Soit $\mathcal{X}$ =Spec(A) une variété affine de type fini sur k. Un ensemble semi-algébrique de $\mathcal{X}^{an}$ est une combinaison booléenne finie d'ensembles de la forme $\{x \in \mathcal{X}^{an} \mid |f(x)| \Diamond |g(x)|\}$ avec $f, g \in A$ et $\Diamond \in \{\leq, <, =\}$. On peut naturellement étendre cette définition à $\mathcal{X}$ une k-variété (pour nous un k-schéma de type fini sur k et séparé) en décrétant que $S \subseteq \mathcal{X}^{an}$ est semi-algébrique s'il existe un recouvrement affine $(\mathcal{U}_i)$ de $\mathcal{X}$ tel que pour tout i, $S \cap \mathcal{U}_i^{an}$ est semi-algébrique dans $\mathcal{U}_i^{an}$. On montre que dans le cas affine, les deux définitions coïncident. De plus, si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un morphisme de k-variétés, et S un ensemble semi-algébrique de $\mathcal{X}^{an}$, $f^{an}(S)$ est semi-algébrique (dans le cas affine, le résultat [Duc03] est une conséquence de l'élimination des quantificateurs dans la théorie des corps valués algébriquement clos).

3 Cohomologie des semi-algébriques

D'après les théorèmes de [Ber93],

$$H^i_c(\mathcal{X}^{an}, \mathbb{Q}_l) = H^i_c(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_l)$$

donc en particulier est de dimension finie. Mais, si $\mathcal{X}$ =Spec(A) est affine et $S = \{x \in \mathcal{X}^{an} \mid |f(x) \leq |g(x)|\}$, S est l'exemple typique d'un semi-algébrique, mais ne peut pas s'identifier à $\mathcal{S}^{an}$ pour $\mathcal{S}$ une k-variété, et en fait n'est même pas a priori un espace k-analytique. Pour définir sa cohomologie, on peut cependant utiliser la théorie des k-germes ([Ber93]) qui permet de définir $H^i_c(\mathcal{X}^{an}, S), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ que l'on notera $H^i_c(S, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$. Notre résultat principal est alors

Théorème 1 *Si l est premier à la caracteristique résiduelle de k, et S un semi-algébrique localement fermé de $\mathcal{X}^{an}$, $H^i_c((\mathcal{X}^{an}, S), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-module de type fini.*

Pour prouver ce résultat, on se ramène dans un premier temps au cas où $\mathcal{X}$ est propre. Dans ce cas, par un argument de compacité, on se ramène à montrer le résultat pour des *espaces affinoïdes algébrisables*, i.e. des espaces affinoïdes de $\mathcal{X}^{an}$ définis par des fonctions algébriques de $\mathcal{X}$. Dans ce dernier cas, l'ingrédient principal est le suivant. Pour $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un espace affinoïde algébrisable, f, g des fonctions algébriques de X, et $S = \{x \in X \mid |f(x)| \leq |g(x)|\}$, on considère $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X le long de l'idéal (f, g), de sorte que $S' = \pi^{-1}(S)$ est maintenant naturellement muni d'une structure d'espace affinoïde. En paticulier, on en déduit la finitude de $H^i_c((\tilde{X}, S'), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$. En travaillant un peu, on peut descendre ce résultat de finitude au germe (X, S). Une récurrence sur le nombre d'inégalités utilisées pour définir S permet alors de conclure.

4 Extension aux ensembles semi-analytiques

On peut étendre ce qui précède au cas suivant. Si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un espace affinoïde, on appelle ensemble semi-analytique de X une combinaison booléenne finie d'ensemble définis par des inégalités $|f| \leq |g|$ avec $f, g \in \mathcal{A}$. Comme précédemment, on peut globaliser cette définition. Si X est un espace k-analytique Haussdorf, $S \subseteq X$ est dit semi-analytique rigide s'il existe un recouvrement affinoïde (U_i) de X tel que $U_i \cap S$ est semi-analytique dans U_i pour tout i. Contrairement au cas algébrique, ici si X est un espace affinoïde, les ensembles semi-analytiques rigides ne sont pas nécessairement semi-analytiques. Dans ce contexte, en adaptant la preuve du réultat précédent, on peut montrer :

Théorème 2 *Si X est un espace k-analytique compact, S un semi-analytique rigide localement fermé de X, k est algébriquement clos, de caracteristique nulle, et l premier à sa caracteristique résiduelle, $H^i_c((X, S), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ est fini.*

On montre également un analogue de ce résultat, en utilisant la théorie des espaces adiques [Hub96].

Références

[Ber90] V.G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields.* Amer Mathematical Society, 1990.

[Ber93] V.G. Berkovich. Etale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 78(1) :5–161, 1993.

[Duc03] Antoine Ducros. Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique. *Manuscripta Math.*, 111(4) :513–528, 2003.

[HL11] E. Hrushovski and F. Loeser. Monodromy and the Lefschetz fixed point formula. *ArXiv e-prints*, November 2011.

[Hub96] Roland Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces.* Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.